

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Н. Н. ШОЛАСТЕР

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

КРАТКИЙ КУРС ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНИКОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

учпедгиз • 1959

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

Н. Н. ШОЛАСТЕР

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

КРАТКИЙ КУРС ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНИКОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

Под редакцией доц. В. П. И в а н и ц к о й

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва 1959



ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие написано в соответствии с действующей программой курса элементарной математики педагогических институтов по разделам «Геометрия» и «Геометрические построения». Вместе со школьными учебниками по геометрии оно содержит необходимый теоретический материал по указанным разделам курса. На примерах в пособии показано также применение изучаемого материала к решению задач на построение.

Изучение курса элементарной геометрии в педагогическом институте должно сочетаться с углубленным повторением школьного курса. Преподавание геометрии в школе, особенно в младших классах, в очень большой степени опирается на наглядность и интуицию учащихся и в целом далеко от научной строгости. Будущий учитель должен иметь ясное представление о естественных пробелах школьного курса. Сравнение изложения отдельных вопросов в данном пособии и в школьных учебниках является поэтому необходимым элементом работы студента. В то же время изложение значительной части геометрического материала в школьном курсе проведено вполне строго и не вызывает у нас возражений. Этот материал мы будем считать хорошо известным изучающему данный курс. Это означает, что он должен быть своевременно и тщательно повторен.

Помимо усвоения теоретического материала, будущий учитель должен получить хорошие навыки в решении различного рода геометрических задач. С этой целью мы рекомендуем в первую очередь воспользоваться различными сборниками задач, изданными как пособия для учителя средней школы. Хороший подбор задач повышенной трудности дан в «Сборнике задач по специальному курсу элементарной математики» П. Е. Моденова.

В данном курсе мы опираемся на некоторый материал, с которым студенты знакомятся при изучении в институте других математических дисциплин. В главе «Измерение отрезков» мы будем считать известной теорию действительного числа, с которой начинается изучение курса математического анализа. При решении вопроса о неразрешимости задач на построение циркулем и линейкой потребуются некоторые сведения из курса высшей алгебры (понятие числового поля, расширение поля, решение алгебраического уравнения в квадратных радикалах). Кроме того, мы будем пользоваться числовыми последовательностями и теоремами об пределах. Этот материал должен быть известным студенту.

При создании данного пособия автор воспользовался многими ценными указаниями покойного Я. С. Дубнова, о котором он вспоминает с большой признательностью.

Автор весьма благодарен В. П. Иваницкой, редактору данной книги, проделавшей большую работу по улучшению ее. Автор считает также своей приятной обязанностью выразить благодарность Н. Г. Федину, Ю. И. Соркину и В. А. Атанасян, советами которых он воспользовался.

Н. Н. Шоластер

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Введение

Несколько тысячелетий назад в государствах Древнего Востока были уже известны некоторые геометрические сведения. Материальные потребности древних египтян заставили их производить простейшие землемерные работы (обмер участков, вычисление их площадей) и гидротехнические сооружения (оросительные каналы). Во время опустошительных весенних разливов Нила смывались границы между земельными участками. Чтобы быстро и правильно их восстанавливать, требовалось значительное умение производить измерительные работы на местности. Для удовлетворения этих важных жизненных потребностей египтяне выработали ряд правил, основанных на опытных данных и не всегда правильных. Так появились первые геометрические предложения. Древние греки заимствовали эти начальные геометрические сведения и постепенно дополнили новыми. Само слово «геометрия» — греческое и означает в буквальном переводе «землемерие».

Важную роль в возникновении и развитии геометрии играла астрономия, развитие которой в свою очередь было вызвано потребностями измерения времени и ориентации на суше и на море.

Энгельс по вопросу о происхождении математики говорит: «Как и все другие науки, математика возникла из *практических нужд* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики»¹⁾.

¹⁾ Фридрих Энгельс, Анти-Дюринг, ОГИЗ, 1948, стр. 37.

Древние греки, постепенно накапливая геометрический материал и систематизируя его, установили связь между отдельными фактами. Изменился подход к изучению геометрических фигур. Древние геометры заметили, что одни из свойств фигур могут быть выведены из других путем рассуждений.

Такие свойства стали формулироваться в виде предложений, истинность которых доказывалась. Было обращено большое внимание на методы доказательств геометрических теорем и решения задач. Например, трудами древнегреческих ученых разработан метод доказательства «от противного», метод геометрических мест точек при решении задач на построение и т. д.

Геометрия из собрания эмпирических правил стала превращаться в науку.

Впоследствии перед древними геометрами возникла проблема построения геометрии по следующему плану: вначале дать определения геометрических понятий и высказать относительно их без доказательства ряд утверждений (аксиомы и постулаты), которые должны являться отправным пунктом последующих рассуждений; все же остальные предложения геометрии (теоремы) — в определенной системе изложить одно за другим и доказать. Справедливость каждой теоремы должна быть установлена на основании ранее доказанных теорем и принятых без доказательства утверждений. Такого плана придерживался более 2000 лет назад знаменитый древнегреческий математик Евклид в своем замечательном труде «Начала», где было дано систематическое изложение основного материала элементарной геометрии.

Предметом геометрии, как и всякой другой науки, является изучение реального мира. Когда окружающие нас предметы мы изучаем с точки зрения их формы и взаимного расположения, то мы изучаем их геометрические свойства. При этом, естественно, мы должны считать другие свойства этих предметов (вес, окраска и т. д.) несущественными, безразличными для нас. Так возникают геометрические понятия.

Приведем выдержку из классического труда Ф. Энгельса «Анти-Дюринг», в которой предельно ясно сказано о происхождении геометрических понятий¹⁾:

¹⁾ Фридрих Энгельс, Анти-Дюринг, ОГИЗ, 1948, стр. 37.

«Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было прийти до понятия фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины...»

В основе геометрии, как и в основе других наук, лежит опыт. Опытным путем были установлены геометрические свойства реальных тел. Путем абстракции от реальных тел мы перешли к геометрическим фигурам, а геометрические свойства реальных тел перенесли на созданные геометрические понятия. Одни из этих свойств оказалось возможным путем логических рассуждений вывести из других. Однако очевидно, что какой-то минимум указанных свойств мы должны принять без доказательства в качестве отправного пункта всех наших последующих выводов.

В результате абстракции реальных предметов возникли основные понятия геометрии. Отправляясь от основных понятий, мы строим новые производные геометрические понятия при помощи логических определений. При этом новые понятия выделяются из более общих понятий (родовое понятие) путем указания характерных для них свойств (видовое отличие). Пример: прямоугольник есть параллелограмм (родовое понятие), углы которого прямые (видовое отличие).

Каковы же основные понятия геометрии? Отправляясь от реальных предметов, путем абстракции мы приходим к понятию геометрического тела. Отправляясь далее от геометрических тел, мы приходим к понятию поверхности как границы между ними. Изучая свойства поверхности, мы забываем о самом геометрическом теле. Поверхность представляется существующей отдельно от тела. Далее, мы приходим к понятию линий как границ поверхностей

и к понятию точки, линии получаются при пересечении поверхностей, а точки — при пересечении линий. Линии и точки мы также представляем в качестве самостоятельных объектов.

Точки, линии, поверхности — это абстракции, но абстракции реального мира и потому имеющие реальное содержание. Для построения геометрии мы пользуемся простейшей линией — прямой и простейшей поверхностью — плоскостью.

Точки, прямые и плоскости являются основными понятиями геометрии. Свойства этих основных понятий, которыми мы пользуемся, в дальнейшем определяются в аксиомах, т. е. в утверждениях, принимаемых без доказательства. Аксиомы, как отмечено выше, имеют опытное происхождение.

Аксиомами определяются понятия принадлежности (точка лежит на прямой, прямая проходит через точку и т. д.), порядка (точка лежит между другими точками) и движения (наложение одного треугольника на другой и т. д.). Эти понятия являются также основными в геометрии. К ним мы приходим путем абстракции соответствующих отношений реальных предметов.

В аксиомах геометрии указываются свойства основных понятий геометрии. Мы можем сказать, что аксиомы геометрии этим самым определяют основные понятия этой науки в их совокупности.

В качестве дополнения к курсу элементарной геометрии в учебниках для средней школы А. П. Киселева и Н. А. Глаголева дается список аксиом, который является основой для логического построения курса геометрии. Это значит, что каждое геометрическое предложение, которого нет в списке аксиом и которое называется теоремой, может быть выведено чисто логическим путем из указанных аксиом, ранее доказанных теорем и принятых определений.

В этом списке имеются известные уже нам аксиомы, которыми мы пользовались в школьном курсе при доказательстве теорем. К ним, например, относится предложение: через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. В то же время при первом знакомстве с некоторыми другими аксиомами у нас может возникнуть недоумение. Так, в одной из аксиом утверждается, что на каждой прямой лежит не менее двух точек. Почему не высказать утверждение в соответствии с нашими наглядны-

ми представлениями, что на каждой прямой лежит бесчисленное множество точек? Дело в том, что последнее утверждение является логическим следствием приведенных в списке аксиом, и поэтому оно включается в число теорем, т. е. доказывается. Вообще все предложения, которые мы можем доказать, исключаются из системы аксиом. В этом выражено стремление свести к минимуму число утверждений геометрии, принимаемых без доказательства.

Само собой разумеется, что построение курса геометрии на основе такой минимальной системы аксиом довольно сложно. Это построение проводится в курсе «Основания геометрии».

Система аксиом, приведенная в данном курсе, является избыточной, что облегчает изложение материала. Это значит, что отдельные из аксиом полностью или частично являются логическими следствиями других аксиом, т. е. могут быть доказаны.

Принятая в курсе система аксиом позволит нам приблизиться к строгому изложению, когда каждое утверждение геометрии, отсутствующее в списке аксиом и называемое теоремой, доказывается без ссылок на очевидность и наглядность.

§ 2. Аксиомы принадлежности

Рассмотрим сначала понятие принадлежности, которое обозначим знаком « \subset ». Это понятие отражает определенные реальные отношения между теми реальными предметами, образами которых являются точки, прямые и плоскости. Употребляемые в геометрии выражения «лежит на» и «проходит через» являются синонимами понятия принадлежности. Понятие принадлежности взаимное. Фразы: «точка A принадлежит прямой a » ($A \subset a$) и «прямая a принадлежит точке A » означают одно и то же.

Понятие «принадлежать» определим следующими аксиомами:

1. *Через две данные точки проходит одна и только одна прямая.*

Иначе можно сказать, что любые две точки A и B принадлежат одной и только одной прямой a .

2. *Каждая прямая проходит через бесконечное множество точек.*

3. *Существует бесконечное множество точек, не лежащих на одной прямой.*

4. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.*

Иначе можно сказать, что любые три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, принадлежат одной и только одной плоскости.

5. *Каждая плоскость проходит через бесконечное множество точек, которые не лежат все на одной прямой.*

6. *Если две точки данной прямой лежат на некоторой плоскости, то все точки этой прямой лежат на той же плоскости.*

В этом случае мы говорим, что прямая принадлежит указанной плоскости. Если точка A принадлежит одновременно двум прямым или прямой и плоскости, или двум плоскостям, то говорят, что эти объекты имеют общую точку A или пересекаются в этой точке. Если прямая a принадлежит одновременно двум плоскостям, то говорят, что эти плоскости имеют общую прямую a или пересекаются по этой прямой.

7. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, проходящую через эту точку.*

8. *Существует бесконечное множество точек, не лежащих в одной плоскости.*

§ 3. Порядок точек на прямой

Когда мы перемещаемся по какой-либо линии на местности, то встречаем предметы, лежащие на ней в определенной последовательности. Переходя путем абстракции к геометрическим понятиям, мы говорим о последовательности точек на линии при движении по ней в определенном направлении. Если на прямой даны две точки A и B , то при движении по ней мы можем сначала встретить точку A , а потом B , или наоборот. В первом случае скажем, что на прямой точка A предшествует точке B , а B следует за A , что перемещение идет в направлении от A к B .

Таким путем мы приходим к понятию порядка точек, принадлежащих одной прямой. Основываясь на нем, мы приходим к понятию «лежать между».

Множество точек называется упорядоченным, если для него установлено понятие «предшествовать», причем:

1) о любых двух точках этого множества можно утверждать, что одна из них и только одна предшествует другой;

2) если точки A , B и C принадлежат данному множеству и точка A предшествует точке B , а точка B предшествует точке C , то точка A предшествует точке C (свойство транзитивности).

Кроме термина «предшествовать», употребляется также термин «следовать за», причем фразы «точка B следует за точкой A » и «точка A предшествует точке B » означают одно и то же.

В упорядоченном множестве точек может существовать такая точка, которая предшествует всем остальным точкам, а также такая, которая следует за всеми остальными точками. Такие точки называются соответственно *начальной* и *конечной* точками множества.

Всякое конечное множество точек легко сделать упорядоченным. Для этого, очевидно, достаточно перенумеровать их и условиться, что точка с меньшим номером предшествует точке с большим номером. Опыт нам подсказывает, что бесконечное множество точек, принадлежащих одной прямой, также может быть упорядочено.

Свойства прямой, связанные с возможностью упорядочения множества ее точек, выражены в следующих аксиомах:

1. Множество всех точек прямой может быть упорядочено и притом двумя способами: если A и B — произвольные точки прямой и при одном из этих способов точка A предшествует точке B , то при другом способе точка B предшествует точке A .

2. Упорядоченное множество точек прямой не имеет начальной и конечной точек (свойство неограниченности прямой).

3. Если на прямой точка A предшествует точке B , то на этой прямой существует бесконечное множество точек, следующих за точкой A и предшествующих точке B .

Прямую, множество точек которой упорядочено, будем называть *ориентированной* или *направленной* прямой.

В силу аксиомы 1 каждая прямая может быть ориентирована двумя способами.

Если при этом на прямой точка A предшествует точке B , то будем говорить, что на данной прямой установлено направление от A к B .

Пусть на прямой даны три точки A , B и C и установлено направление от A к C . Мы скажем, что точка B лежит между точками A и C , если она следует за точкой A и предшествует точке C .

Если мы установим на данной прямой направление от C к A , то в силу аксиомы 1 точка B будет в этом случае следовать за точкой C и предшествовать точке A , т. е. лежать между точками C и A . Следовательно, принятое нами понятие «лежать между» не зависит от того, каким способом мы установим направление на прямой.

Из аксиомы 1 следует, что из трех точек прямой всегда одна и только одна лежит между другими. Пусть, например, A , B и C — три точки прямой a , и на этой прямой установлено направление от A к B (A предшествует B). Тогда либо C предшествует A , либо C следует за A и предшествует B , либо C следует за B . В первом случае A лежит между C и B , во втором C лежит между A и B и, наконец, в третьем B лежит между A и C .

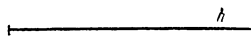
Из аксиомы 3 вытекает, что между двумя любыми точками прямой лежит бесконечное множество точек этой же прямой.

Т е о р е м а. *Любая точка O прямой разделяет остальные точки этой прямой на два класса, каждый из которых содержит бесчисленное множество точек, следующим образом: точка O лежит между любыми двумя точками различных классов, но не лежит между двумя точками одного класса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем, кроме точки O , еще какую-либо точку A данной прямой и установим на этой прямой направление от O к A (черт. 1). Все точки, которые следуют за точкой O , отнесем к первому классу, а точки, предшествующие точке O , — ко второму классу. В силу аксиомы 2 за каждой точкой первого класса следуют точки, ко-



Черт. 1



Черт. 2

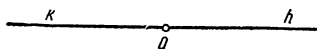
торые принадлежат этому же классу. Следовательно, множество точек первого класса бесконечно. Аналогичное заключение можно сделать для точек второго класса. Свойство точки O лежать между двумя любыми точками разных классов и не лежать между точками одного класса очевидно.

Если A и B — точки одного класса, то говорят, что они лежат по одну сторону от точки O , если A и B — точки разных классов, то говорят, что они лежат по разные стороны от точки O .

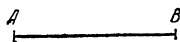
Совокупность точек прямой, лежащих по одну сторону от точки O , вместе с этой точкой называется **лучом**, выходящим из точки O (начало луча). Условное изображение луча дано на чертеже 2.

Точка O прямой a определяет два луча — h и k , выходящих из этой точки и принадлежащих данной прямой (черт. 3). Каждый из них называется дополнением другого до прямой.

Луч, выходящий из точки A и проходящий через точку B , будем называть **лучом AB** .

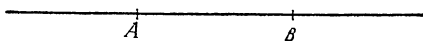


Черт. 3



Черт. 4

Совокупность точек, лежащих между A и B , вместе с этими точками называется **отрезком AB** ; точки A и B называются концами отрезка, все остальные точки отрезка называются внутренними. Условное изображение отрезка дано на чертеже 4.



Черт. 5

Две точки A и B определяют на прямой a отрезок AB и два луча, выходящих из этих точек и не имеющих между собой общих точек (черт. 5).

§ 4. Понятие фигуры

Фигурой называется любое множество точек. Следовательно, фигурами являются отрезки и лучи. Прямую (плоскость) мы будем в дальнейшем считать также фигурой, представляющей множество точек, принадлежащих этой прямой (плоскости). Фигурой является также отдельно взятая точка.

Выделяя множество точек, обладающих определенными свойствами, мы этим самым определяем фигуру. Если фигура представляет множество всех точек, обладающих определенным свойством, то говорят, что данная фигура представляет геометрическое место точек, обладающих этим свойством.

Утверждение, что данная фигура F представляет множество или геометрическое место точек, удовлетворяющих определенным условиям, означает, что:

1) всякая точка фигуры F удовлетворяет всем данным условиям;

2) всякая точка, удовлетворяющая всем данным условиям, принадлежит фигуре F .

Если все точки фигуры F являются точками фигуры Φ , то говорят, что фигура F принадлежит фигуре Φ . Принадлежность фигуры F фигуре Φ обозначается следующим образом: $F \subset \Phi$.

Соединением фигур F_1, F_2, \dots, F_n называется множество точек, принадлежащих хотя бы одной из этих фигур. Совокупность общих точек фигур F_1, F_2, \dots, F_n называется *пересечением* этих фигур. Фигуры, не имеющие общих точек, будем называть *непересекающимися* (их пересечение является пустым множеством).

В силу общего определения фигуры соединение или пересечение двух или нескольких фигур является также фигурой. Если F — пересечение фигур F_1 и F_2 , то этот факт символически записывается так: $F = F_1 \times F_2$.

Соединение отрезков AB, BC, \dots, KL и LM называется *ломаной линией* или просто *ломаной*. Данная ломаная обозначается так: $ABCD\dots LM$. При этом говорят, что она соединяет точки A и M . Отрезки, составляющие ломаную, и их концы называются соответственно ее сторонами и вершинами. Точки A и M данной ломаной называются ее концами. Отдельно взятый отрезок можно рассматривать как частный случай ломаной.

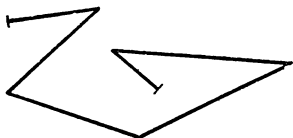
Если концы ломаной совпадают, то она называется *замкнутой* ломаной.

Ломаная называется простой, если выполняются условия:

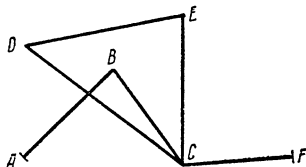
1) каждая вершина ее может служить общим концом только двух сторон;

2) помимо вершин, стороны ломаной не имеют общих точек.

Стороны простой ломаной называются смежными или соседними, если они имеют общий конец. Вершины ломаной называются смежными или соседними, если они принадлежат одной стороне.



Черт. 6



Черт. 7

Пример простой ломаной дан на чертеже 6. Ломаная $ABCDEF$, изображенная на чертеже 7, не является простой: вершина ее C — общий конец четырех сторон, а стороны AB и CD имеют общую внутреннюю точку.

Фигура называется *выпуклой*, если ей принадлежит отрезок, соединяющий любые две ее точки.

Простейшими выпуклыми фигурами являются: прямая, плоскость, луч и отрезок. Отдельно взятую точку будем считать также выпуклой фигурой.

Т е о р е м а. *Пересечение двух (или нескольких) выпуклых фигур является выпуклой фигурой.*

Пусть F — пересечение выпуклых фигур F_1 и F_2 и пусть A и B — две любые точки фигуры F . Следовательно, точки A и B принадлежат как фигуре F_1 , так и фигуре F_2 . В силу их выпуклости отрезок AB принадлежит каждой из этих фигур. Поэтому отрезок AB принадлежит и их пересечению.

Если фигура F представляет единственную точку, то она выпукла в силу определения. Теорема доказана.

§ 5. Угол

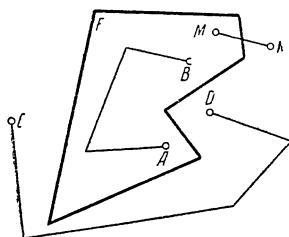
Фигура называется *плоской*, если она принадлежит некоторой плоскости.

Будем говорить, что фигура F делит плоскость, которой она принадлежит, на две области, если при этом точки плоскости, не принадлежащие F , можно разбить на два класса следующим образом (черт. 8):

- 1) каждый класс содержит точки;
- 2) любые две точки одного класса можно соединить ломаной, не имеющей с F общих точек;

3) отрезок, соединяющий любые две точки различных классов, пересекает F (т. е. имеет с ней общие точки). Каждый из этих классов составляет одну область.

Из определения выпуклой фигуры следует, что область будет выпуклой, если ей принадлежит отрезок, соединяющий любые две ее точки.



Черт. 8

Рассмотрим простейшие плоские фигуры, делящие плоскость на две области. Прежде всего возьмем прямую.

Аксиома. *Всякая прямая, лежащая в некоторой плоскости, делит эту плоскость на две выпуклые области.*

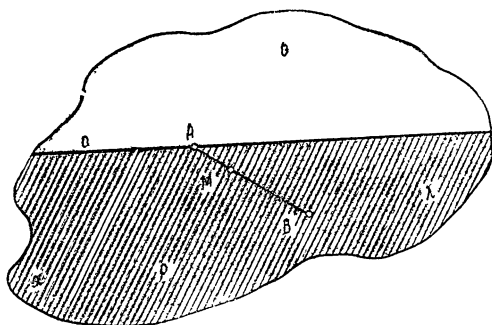
Соединение каждой из этих областей с указанной прямой называется *полуплоскостью*.

Точки, принадлежащие одной области, назовем лежащими по одну сторону прямой: точки, принадлежащие разным областям, назовем лежащими по разные стороны этой прямой. При этом говорят, что данная прямая ограничивает полуплоскость, а полуплоскость исходит из этой прямой.

Прямую, ограничивающую полуплоскость, назовем *ребром* этой полуплоскости.

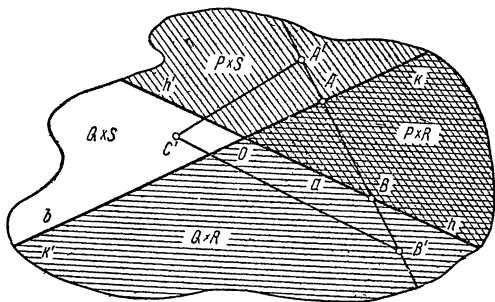
Каждая прямая, лежащая в плоскости α , ограничивает две полуплоскости λ и μ . Каждую из этих полуплоскостей будем называть дополнительной по отношению к другой.

Т е о р е м а. *Полуплоскость является выпуклой фигурой.*



Черт. 9

Пусть прямая a делит плоскость α на области P и Q (черт. 9). Соединение прямой a с областью P дает полуплоскость λ . Отрезок, соединяющий любые две точки области P , принадлежит, очевидно, λ . То же относится к двум любым точкам прямой a . Рассмотрим теперь отрезок AB , соединяющий точку A прямой a с точкой B области P . Пусть M — его внутренняя точка. Отрезок AB не имеет других общих точек с прямой a , кроме точки A (иначе он принадлежал бы этой прямой, что не имеет места). Поэтому точка M не принадлежит прямой a . Она не принадлежит области Q , так как тогда отрезок MB пересекал бы прямую a в некоторой внутренней точке N отрезка AB . Следовательно, любая точка M отрезка AB принадлежит области P , т. е. отрезок AB принадлежит полуплоскости λ . Теорема доказана.



Черт. 10

Рассмотрим теперь две пересекающиеся в точке O прямые a и b , лежащие в плоскости α (черт. 10). Пусть прямая a делит плоскость α на области P и Q , а прямая b — на области R и S . Пусть, далее, h и h' — взаимно дополнительные лучи прямой a , исходящие из точки O , а k и k' — взаимно дополнительные лучи прямой b , исходящие из той же точки. Выберем обозначения так, чтобы лучи h , h' , k и k' (кроме общего начала O) принадлежали соответственно областям R, S, P и Q . Так как каждая из этих областей выпукла, то их пересечения

$$T = P \times R, \quad T' = P \times S, \quad T'' = Q \times R \quad \text{и} \quad T''' = Q \times S$$

по доказанной в § 4 теореме являются выпуклыми фигурами.

Рассмотрим фигуру F , представляющую соединение лучей h и k . Все точки плоскости, не принадлежащие F , разобьем на два класса: к первому классу отнесем пересечение $T = P \times R$, ко второму классу T_1 отнесем остальные точки. Класс T_1 представляет соединение областей Q и S . Можно также считать его соединением пересечений T' , T'' , T''' и лучей h' и k' без их начала O .

Если A и B — точки на лучах h и k , не совпадающие с точкой O , то все внутренние точки отрезка AB принадлежат классу T . Точки прямой AB , лежащие вне отрезка AB , принадлежат пересечениям T' и T'' , т. е. классу T_1 . Если взять на прямой AB одну точку из пересечения T' , а другую из пересечения T'' , то отрезок, соединяющий их (на чертеже $A'B'$), содержит все точки отрезка AB . Следовательно, класс T_1 не является выпуклой фигурой.

В силу выпуклости класса T любые две точки его можно соединить отрезком, принадлежащим этому классу. Любые две точки класса T_1 можно соединить ломаной, целиком принадлежащей ему. Если, например, таковыми являются точки A' и B' , то ломаная $A'C'B'$, где точка $C' \in T'''$, принадлежит T_1 (отрезок $A'C' \subset S$, а отрезок $C'B' \subset Q$).

Отрезок, соединяющий точку M класса T с точкой N класса T_1 , или пройдет через точку O , или пересечет один из лучей h и k . В этом легко убедиться, рассматривая различные положения точек M и N .

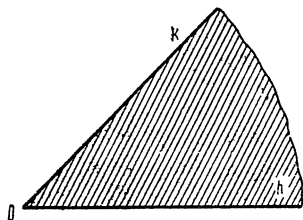
Налицо все условия, в силу которых мы имеем право сказать, что фигура F делит плоскость α на две области T и T_1 . Очевидно, что F может представлять соединение двух любых лучей, исходящих из одной точки и не принадлежащих одной прямой. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Совокупность двух лучей, выходящих из одной точки и не принадлежащих одной прямой, делит плоскость, в которой они лежат, на две области, из которых одна выпуклая, а другая нет.*

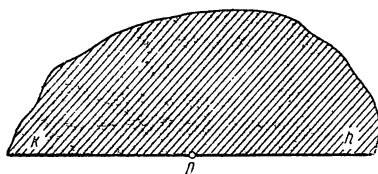
Соединение данной совокупности лучей вместе с одной из указанных областей назовем *углом*. Общее начало лучей назовем вершиной угла, а сами лучи — сторонами его (черт. 11). Угол со сторонами h и k будем обозначать символом $\angle (h, k)$. Будем употреблять также обозначения угла, принятые в школьном курсе.

Таким образом, совокупность двух лучей, выходящих из одной точки, определяет два угла. Область плоскости,

принадлежащая углу, называется внутренней его областью, вторая область, не принадлежащая углу, называется внешней областью угла. Если относительно внутренней области угла нет специальных указаний, то за таковую принимается выпуклая область.



Черт. 11

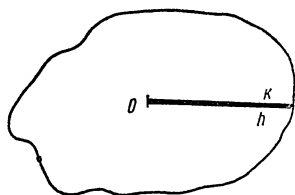


Черт. 12

Вернемся к чертежу 10. Соединением прямой a с областью P является полуплоскость λ , а соединением прямой b с областью R — полуплоскость μ . Пересечение полуплоскостей λ и μ , очевидно, представляет $\angle (h, k)$ с внутренней областью T . Отсюда следует, что угол, внутренняя область которого выпукла, является выпуклой фигурой.

Если лучи h и k являются взаимно дополнительными, то соединение их представляет прямую и поэтому делит плоскость, которой они принадлежат, на две выпуклые области. В этом случае соединение лучей h и k и одной из этих областей называют развернутым углом. Развернутый угол, следовательно, представляет полуплоскость, ограниченную соединением двух взаимно дополнительных лучей (черт. 12).

Если лучи h и k совпадают, то их соединение F представляет собой луч h . В этом случае фигура F не делит плоскость на области. В целях общности выводов принято называть соединение совпавших лучей h и k с плоскостью, которой они принадлежат, полным углом. Внутренней областью полного угла является



Черт. 13

вся плоскость без точек лучей h и k (черт. 13).

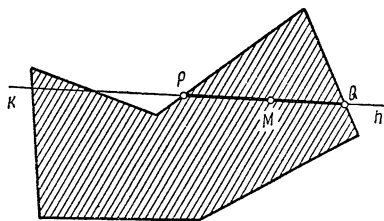
§ 6. Многоугольник

Прежде чем дать определение многоугольника, примем следующую аксиому.

Аксиома. Простая замкнутая ломаная (§ 4), принадлежащая плоскости, делит все ее точки, не принадлежащие ломаной, на две области; существуют прямые, целиком принадлежащие одной области, и не существует лучей, целиком лежащих во второй области. Первая из этих областей называется внешней, а вторая — внутренней относительно данной ломаной.

Плоская простая замкнутая ломаная вместе с внутренней областью, определяемой ею, называется *многоугольником*.

Точки внутренней области называются внутренними точками многоугольника (черт. 14). Вершины и стороны



Черт. 14

ломаной называются соответственно вершинами и сторонами многоугольника, а сама ломаная — контуром этого многоугольника.

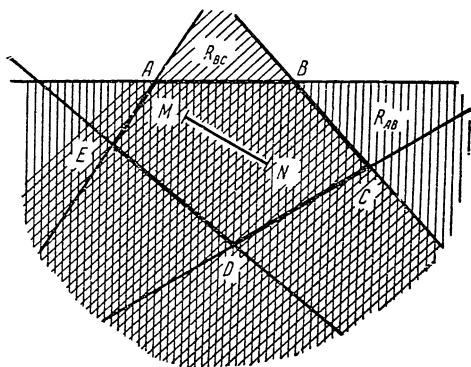
Пусть M — внутренняя точка многоугольника. Проведем через нее произвольную прямую a и обозначим буквами h и k взаимно дополнительные

лучи этой прямой, выходящие из точки M . Каждый из них пересечет в силу аксиомы контур данного многоугольника. Следовательно, точка M будет лежать на отрезке прямой a , целиком принадлежащем данному многоугольнику и имеющем концы на контуре его. Этим доказана следующая теорема.

Теорема. Любая прямая, проходящая через внутреннюю точку многоугольника, имеет с ним общий отрезок, содержащий данную точку и соединяющий две точки контура этого многоугольника.

Особое значение в курсе геометрии имеют выпуклые многоугольники, т. е. такие, которые представляют собой выпуклые фигуры. Следующая теорема устанавливает признак, по которому мы можем утверждать, что данный многоугольник выпуклый.

Теорема. Многоугольник является выпуклым, если по отношению к прямой, проходящей через любые две его соседние вершины, все остальные вершины лежат по одну сторону от этой прямой (черт. 15).



Черт 15

Доказательство. Пусть $ABCDE$ — данный многоугольник. Полу плоскость, ограниченную прямой AB (A и B — соседние вершины) и содержащую все вершины многоугольника, обозначим через R_{AB} . Так как полу плоскость R_{AB} — выпуклая фигура, то она содержит контур многоугольника. По доказанной выше теореме любая внутренняя точка многоугольника также принадлежит этой полу плоскости.

Пусть F — пересечение полу плоскостей R_{AB} , R_{BC} , R_{CD} , R_{DE} и R_{EA} . F — выпуклая фигура (§ 4), которой принадлежат все внутренние точки многоугольника и его контур. Докажем теперь, что любая точка фигуры F принадлежит данному многоугольнику.

Пусть N — любая точка фигуры F , а M — точка ее, являющаяся внутренней точкой данного многоугольника. Очевидно, нам достаточно рассмотреть случай, когда точка N не принадлежит контуру многоугольника. Отрезок MN не может пересекать контур многоугольника, так как иначе точка N не могла бы принадлежать всем указанным полу плоскостям. Поэтому N — точка, принадлежащая вместе с точкой M одной области плоскости, определяемой дан-

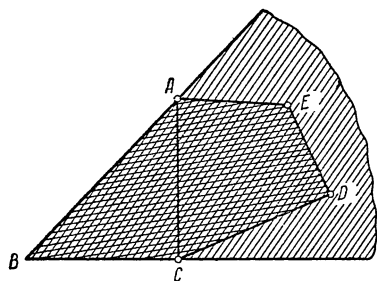
ным многоугольником. Следовательно, N — внутренняя точка его.

Таким образом, установлена тождественность между фигурой F и данным многоугольником. Этим теорема доказана.

Простейшим многоугольником является треугольник. Очевидно, что для треугольника условие доказанной теоремы выполняется. Следовательно, треугольник — выпуклая фигура.

Пусть F — выпуклый многоугольник и A, B, C — три последовательные вершины его (A и C — вершины, соседние с вершиной B). Угол, сторонами которого являются лучи BA и BC и который содержит отрезок AC , называется углом многоугольника F (черт. 16). При этом говорят, что данный угол образован сторонами многоугольника BA и BC .

Очевидно, что угол выпуклого многоугольника является выпуклой фигурой (§ 5). Можно показать также, что выпуклый многоугольник принадлежит



Черт. 16

каждому из своих углов (т. е. все точки многоугольника являются точками любого его угла).

Пересечение выпуклого многоугольника F и прямой a представляет выпуклую фигуру, принадлежащую прямой a . Таковой может быть только отрезок или отдельная точка (из аксиомы следует, что луч не может принадлежать многоугольнику). Если пересечением является отрезок, то концы его принадлежат контуру многоугольника. Если при этом отрезок не является стороной многоугольника, то его внутренние точки будут также внутренними точками многоугольника F . (Доказательство этого очевидного предложения опускаем.)

Отсюда вытекают следующие два свойства треугольника:

1. Если прямая лежит с треугольником в одной плоскости, не проходит ни через одну из его вершин и пересекает одну из его сторон, то она пересекает еще одну и только одну из двух других сторон этого треугольника.

2. Прямая, проходящая через одну из вершин треугольника и его внутреннюю точку, пересекает сторону треугольника, лежащую против этой вершины.

§ 7. Понятие движения в элементарной геометрии

В курсе элементарной геометрии мы устанавливаем равенство и неравенство фигур путем «наложения» одной из них на другую, т. е. пользуемся понятием движения. Если фигуры при наложении совместились, то мы называем их равными. Таким образом, понятию равенства фигур мы предпосылаем понятие движения. Само понятие движения в геометрии при этом становится основным, свойства его являются абстракцией соответствующих свойств перемещений реальных тел в пространстве.

При перемещении тела в пространстве оно имеет начальное и конечное положения, некоторая точка его из начального положения A перемещается в конечное положение A' . Положение твердого тела в пространстве полностью определено положением трех его точек, не лежащих на одной прямой. Если закрепить две точки твердого тела, то при повороте его вокруг оси все точки этой оси окажутся неподвижными. Таковы некоторые свойства перемещений реальных тел в пространстве, которое мы познаем при помощи опыта. Путем абстракции мы приходим к свойствам движения в геометрии, которые определяются аксиоматически.

В геометрии под движением фигуры F понимается особое рода преобразование ее в фигуру F' , при котором каждой точке первой фигуры соответствует определенная точка второй фигуры. Таким образом, в отличие от движения в механике мы рассматриваем только исходное и конечное положения точек при движении.

Прежде чем выяснить свойства движения, дадим определение точечного преобразования.

Пусть при помощи какого-либо правила или закона каждой точке A фигуры F ставится в соответствие определенная точка A' . Будем говорить в этом случае, что мы имеем *точечное преобразование*, при котором точка A *отображается* в точку A' . Совокупность точек A' образует фигуру F' . Будем говорить, что фигура F при этом преобразовании *отображается* в фигуру F' .

Пусть вслед за преобразованием 1, при котором точка A отобразилась в точку A' , совершено преобразование 2, при котором точка A' отобразилась в точку A'' . В результате

мы получаем новое преобразование 3, при котором точка A отобразилась в точку A'' . Это преобразование 3 называется *произведением* преобразования 1 на преобразование 2.

Определение точечного преобразования допускает, что различным точкам фигуры F может соответствовать одна точка фигуры F' . В дальнейшем особый интерес для нас будут представлять *взаимно однозначные точечные преобразования*.

Точечное преобразование называется взаимно однозначным, если при нем любые две различные точки A и B отображаются в различные точки A' и B' .

Для любого взаимно однозначного точечного преобразования, при котором произвольная точка A отображается в точку A' , можно установить новое точечное преобразование, при котором точка A' отображается в точку A . Это новое преобразование является тоже взаимно однозначным и называется *обратным* по отношению к первому преобразованию.

При точечном преобразовании отдельные точки могут отображаться сами в себе. В целях общности рассматривается преобразование, при котором каждая точка отображается сама в себя. Такое преобразование называется *тождественным*.

Произведение взаимно однозначного преобразования на обратное по отношению к нему преобразование отображает каждую точку самое в себя и поэтому является тождественным преобразованием.

Перейдем теперь к выяснению свойств основного понятия «движения».

Мы принимаем аксиоматически существование особого рода точечных преобразований, называемых движениями и имеющих следующие свойства:

1. *При движении прямая отображается в прямую, а плоскость — в плоскость.*

П р и м е ч а н и е. Прямую и плоскость при этом мы рассматриваем как фигуры, т. е. как совокупности точек (§ 4).

2. *Если точка C лежит между точками A и B (§ 3) и при движении эти точки отображаются соответственно в точки C' , A' и B' , то C' лежит между A' и B' .*

Отсюда следует, что упорядоченное множество точек прямой a отображается в упорядоченное множество точек соответствующей прямой a' .

3. *Произведение двух любых движений есть движение.* Легко видеть, что при движении различные точки A и B отображаются в различные же точки A' и B' . Действительно, если бы точки A' и B' совпадали, то точка C , лежащая между A и B , не могла бы отобразиться в точку C' , лежащую между A' и B' , что противоречит свойству 2. Следовательно, движение является взаимно однозначным точечным преобразованием и поэтому для каждого движения существует обратное преобразование.

4. *Преобразование, обратное движению, есть движение.*

С л е д с т в и е. *Тождественное преобразование есть движение (тождественное движение).*

Действительно, произведение движения на обратное по отношению к нему является движением (свойство 3) и в то же время тождественным преобразованием.

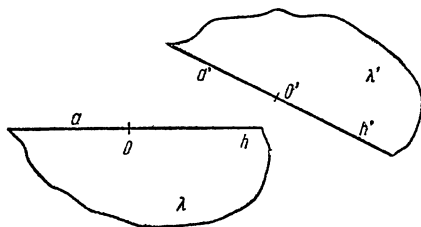
Из перечисленных свойств вытекает, что каждое движение отображает отрезок в отрезок, луч в луч, полуплоскость в полуплоскость и угол в угол. (Доказательство этих очевидных предложений опускаем.)

5. *Пусть при некотором движении луч h отображается в луч h' . Тогда при всяком другом движении, отображающем луч h в тот же луч h' , точки луча h отображаются в те же точки луча h' , что и при данном движении.*

В частности, луч h отображается сам в себя при тождественном движении. Следовательно, любое движение, отображающее луч h сам в себя, отображает каждую точку этого луча самое в себя.

Из свойства 5 следует также, что если при некотором движении отрезок AB отображается в отрезок $A'B'$, то и при всяком движении, отображающем луч AB в луч $A'B'$, отрезок AB отображается в тот же отрезок $A'B'$.

6. *Всегда существует движение и притом единственное, при котором полуплоскость λ , ограниченная прямой a ,*



Черт. 17

отображается в другую заданную полуплоскость λ' , ограниченную прямой a' , причем луч h прямой a , выходящий из точки O , отображается в заданный луч h' прямой a' , выходящий из точки O' (черт. 17).

Мы можем на основе свойства 6 сказать, что движение полностью определено, если известно, что точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, отображаются при этом движении в точки A' , B' и C' . Действительно, при указанном движении полуплоскость, ограниченная прямой AB и содержащая точку C , отображается в полуплоскость, ограниченную прямой $A'B'$ и содержащую точку C' , а луч AB отображается в луч $A'B'$. Налицо условия, согласно которым мы утверждаем единственность движения.

7. Существует движение, отображающее отрезок AB в отрезок BA (концы отрезка AB отображаются взаимно друг в друга); при указанном движении на отрезке AB существует единственная точка C , отображающаяся сама в себя.

8. Существует движение, отображающее угол hk в угол kh , причем внутренние области обоих углов совпадают (т. е. угол отображается сам в себя, но его стороны h и k отображаются взаимно друг в друга).

З а м е ч а н и е. В курсах оснований геометрии часто предпочитают в качестве основного понятия брать не движение, а понятие равенства (или конгруэентность), так как система аксиом при этом оказывается более удобной с точки зрения требований минимальности. Движение определяется на основе понятия равенства как точечное преобразование, при котором фигура отображается в равную ей фигуру. Система аксиом, приведенная в дополнениях к учебникам Киселева и Глаголева, заимствована из такого рода курсов.

Для обозначения движения будем употреблять букву f с различными индексами. Запись

$$f(F) = F'$$

означает, что при движении f фигура F отображается в фигуру F' .

Тождественное движение будем обозначать через f_0 ; для обозначения движения, обратного движению f , будем употреблять символ f^{-1} . Следовательно, если

$$\begin{aligned} f(A) &= A', \text{ то} \\ f^{-1}(A') &= A. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что f в свою очередь является обратным движением для f^{-1} , т. е.

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Если f_1 — первое движение, а f_2 — второе, то их произведение f запишем так: $f = f_2 f_1$.

Запись $f_1 f_2$ будет означать, что теперь первым движением является f_2 , а вторым f_1 .

Из определения обратного движения следует, что

$$f^{-1}f = ff^{-1} = f_0.$$

§ 8. Равенство фигур

На основе понятия движения определим равенство фигур. *Фигура F' называется равной фигуре F , если существует движение f , отображающее F в F' .* В этом случае будем писать, что $F' = F$.

Из данного определения и аксиом движения вытекают следующие свойства равенства фигур.

I. *Каждая фигура равна самой себе.*

Это свойство следует из существования тождественного движения, при котором $F = f_0(F)$.

II. *Если фигура F' равна фигуре F , то, обратно, F равна F' .*

По условию $F' = F$. Следовательно, существует движение f , при котором $F' = f(F)$. По свойству 4 (§ 7) существует движение f^{-1} , при котором $F = f^{-1}(F')$. Отсюда:

$$F = F'.$$

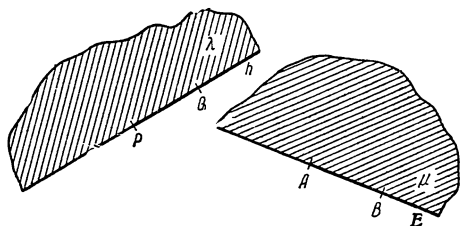
III. *Если фигура F_1 равна фигуре F_2 , а фигура F_2 равна фигуре F_3 , то фигуры F_1 и F_3 равны.*

По условию существуют движения f_1 и f_2 , при которых $F_2 = f_1(F_1)$ и $F_3 = f_2(F_2)$. Произведение движений $f_2 f_1$ преобразует F_1 в F_3 . По свойству 3 (§ 7) это произведение есть движение. Значит, $F_3 = F_1$.

Все, что сказано о равенстве фигур, относится, конечно, к отрезкам и углам. Докажем теперь следующую важную теорему.

Т е о р е м а. *Пусть задан отрезок PQ и пусть на прямой a дана точка A . Тогда на прямой a по данную сторону от точки A существует единственная точка B , такая, что $AB = PQ$.*

Доказательство. Пусть λ и μ — полуплоскости, ограниченные соответственно прямыми PQ и a , и пусть l — луч прямой a , выходящий из точки A и проходящий через точки, лежащие по заданную сторону прямой a (черт. 18). По свойству 6 (§ 7) существует движение f , при котором луч PQ отображается в луч l , а полуплоскость λ — в полуплоскость μ . Точка P при этом движении отобража-



Черт. 18

ется в точку A , а точка Q отображается в некоторую точку B луча l , отрезок PQ отображится в отрезок AB . Следовательно, $AB = PQ$.

Из свойства движений 5 следует, что при всяком другом движении, при котором луч PQ отображается в луч l , отрезок PQ отобразится в тот же отрезок AB .

Рассмотрим теперь движение f' , при котором луч QP отображается в луч l . Точка Q при этом движении отображается в точку A , а точка P — в некоторую точку B' ; отрезок QP , следовательно, отражается в отрезок AB' . По свойству движений 7 существует движение f'' , при котором отрезок PQ отображается в отрезок QP . Произведение движений $f'f''$ отображает луч PQ в луч l , а отрезок PQ — в отрезок AB' . Как выяснено выше, отрезок AB' совпадает с отрезком AB . Теорема доказана.

Можем сказать в силу доказанной теоремы, что на любой прямой от любой ее точки мы всегда можем отложить в данном направлении отрезок, равный данному, и притом единственным образом.

Если C — внутренняя точка отрезка AB , то отрезок AC представляет часть отрезка AB . Из теоремы следует, что никакой отрезок не может быть равен своей части.

Рассмотрим теперь *н е р а в н ы е* отрезки, т. е. такие, которые не отображаются друг в друга при помощи движений.

Будем говорить, что AB меньше CD ($AB < CD$) или, что CD больше AB ($CD > AB$), если на отрезке CD существует точка E , такая, что $AB = CE$.

Можно доказать, что:

1) из двух неравных отрезков всегда один и только один больше другого;

2) если $AB > CD$, а $CD > EK$, то $AB > EK$ (свойство транзитивности).

Т е о р е м а. На любом отрезке AB существует единственная точка C , такая, что $AC = CB$.

Теорема легко вытекает из свойств движения. По свойству 7 (§ 6) существует движение f , при котором отрезок AB отображается в отрезок BA , а на отрезке AB существует единственная точка C , отображающаяся сама в себя. Тогда отрезок AC отображается в отрезок CB , т. е. $AC = CB$.

Существуют два движения, отображающие $\angle (h, k)$ сам в себя: *тождественное движение* и *движение, при котором лучи h и k отображаются взаимно друг в друга*. Следовательно, $\angle (h, k) = \angle (k, h)$, если оба эти угла выпуклы или если оба они невыпуклы.

Рассмотрим два угла: $\angle (h, k)$ и $\angle (l, m)$. Если не существует движения, отображающего один из них в другой, то эти углы считаются неравными в силу общего определения равенства фигур. Если при некотором движении луч h отображается в луч l , а внутренняя область $\angle (h, k)$ при этом отображается в часть внутренней области $\angle (l, m)$, то считаем, что $\angle (h, k)$ меньше $\angle (l, m)$ или что $\angle (l, m)$ больше $\angle (h, k)$ ($\angle (h, k) < \angle (l, m)$ или $\angle (l, m) > \angle (h, k)$).

Нетрудно показать, что *любые два угла: $\angle (h, k)$ и $\angle (l, m)$ могут находиться только в одном из возможных отношений*:

1) $\angle (h, k) = \angle (l, m)$,

или

2) $\angle (h, k) > \angle (l, m)$,

или

3) $\angle (h, k) < \angle (l, m)$.

Кроме того, если $\angle (h, k) > \angle (l, m)$, а $\angle (l, m) > \angle (p, q)$, то $\angle (h, k) > \angle (p, q)$ (свойство транзитивности).

Перечисленные аксиомы дают возможность обосновать понятие сложения для отрезков и для углов, известное из школьного курса, и показать, что это действие над отрезками и углами обладает свойствами переместительности и сочетательности. Вычитание отрезков и углов определяется как действие, обратное действию сложения.

Рассмотрим теперь многоугольники. При движении контур многоугольника F , лежащего в плоскости α , отображается в контур некоторого многоугольника F' , лежащего в плоскости α' . Плоскость α при этом отображается в плоскость α' . Отрезок, соединяющий любые точки M и N плоскости α , отображается в отрезок $M'N'$ плоскости α' . Если отрезок MN пересекает контур многоугольника F , то отрезок $M'N'$ пересекает контур многоугольника F' , и наоборот. Отсюда следует, что точки, принадлежащие одной области плоскости α , определяемой контуром F , отображаются в точки одной области плоскости α' , определяемой контуром F' ; точки разных областей для контура F отображаются в точки разных областей для контура F' . Очевидно, что при этом область, не содержащая лучей, отображается в область, тоже не содержащую лучей. Следовательно, внутренняя область многоугольника F отображается во внутреннюю область многоугольника F' .

Проведенное рассуждение показывает справедливость теоремы: *многоугольники равны, если равны их контуры.*

Следовательно, чтобы установить равенство многоугольников, достаточно доказать существование движения, при котором контур одного многоугольника отображается в контур другого (общий признак равенства многоугольников).

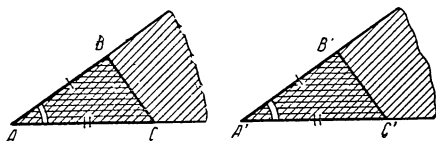
Согласно общему определению равенства фигур два треугольника равны, если существует движение, отображающее один из них в другой. Очевидно, что углы одного треугольника отображаются в углы другого, и, следовательно, соответствующие углы этих треугольников равны.

Т е о р е м а. *Если в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $\angle A = \angle A'$, $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$, то эти треугольники равны* (первый признак равенства треугольников).

Так как $\angle A = \angle A'$, то существует движение f , отображающее первый из этих углов во второй. Будем считать, что при этом движении луч AB отображается в луч $A'B'$.

При движении f точка B луча AB отобразится в точку B' луча $A'B'$. Тогда $AB = A'B'$. Но так как $AB = A'B'$, то в силу первой теоремы данного параграфа точки B' и B''

совпадают. Такое же рассуждение показывает, что точка C при движении f отображается в точку C' . Так как концы отрезка BC отобразились при этом в концы отрезка $B'C'$, то отрезок BC отображился в отрезок $B'C'$ (черт. 19).



Черт. 19

Контур $\triangle ABC$ отображился в контур $\triangle A'B'C'$. Значит, и внутренняя область одного треугольника отображилась во внутреннюю область другого. Итак,

$$f(\triangle ABC) = \triangle A'B'C', \text{ т. е. } \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

С л е д с т в и е. *В равнобедренном треугольнике углы, лежащие против равных сторон, равны.*

Пусть в $\triangle ABC$ $AB = AC$. Так как $\angle BAC = \angle CAB$, то по доказанной теореме $\triangle BAC = \triangle CAB$. Это значит, что существует движение, при котором $\triangle BAC$ отображается сам в себя, а вершины B , A и C отображаются соответственно в вершины C , A и B . Отсюда следует, что $\angle B = \angle C$.

Как видим, доказательство первого признака равенства треугольников по существу не отличается от обычного доказательства путем «наложения» треугольников, только вместо «наложения» мы говорим о существовании движения f , чем и раскрывается смысл этого термина. Если мы проследим за доказательствами остальных признаков равенства треугольников, то увидим, что все они будут теперь полностью обоснованы.

§ 9. Деление угла пополам. Перпендикулярные прямые

Определяя какую-либо фигуру, обладающую некоторыми свойствами, мы должны всякий раз показывать существование этой фигуры. Это в школьном курсе делается далеко не всегда, особенно в его первых главах. Остановимся сейчас на понятиях биссектрисы угла и прямого угла.

Если из вершины $\angle(h, k)$ выходит луч l и при этом образуются равные углы: $\angle(h, l)$ и $\angle(l, k)$, соединением

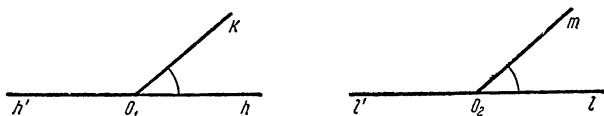
которых является $\angle(h, k)$, то говорят, что луч l делит $\angle(h, k)$ пополам.

Луч, делящий угол пополам, называется *биссектрисой* этого угла.

Два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, две другие образуют прямую и эти углы не имеют общих внутренних точек (значит, каждый из них меньше развернутого).

Сумма смежных углов представляет развернутый угол.

Если смежные углы равны, то каждый из них называется *прямым углом*. Их общая сторона называется *перпендикуляром* к прямой, образуемой двумя другими сторонами. Можно также сказать, что биссектриса развернутого угла является перпендикуляром к прямой, образуемой его сторонами.



Черт. 20

Т е о р е м а. Если углы равны, то равны и смежные с ними углы.

Пусть $\angle(h, k) = \angle(l, m)$ и пусть $\angle(h', k)$ и $\angle(l', m)$ — соответствующие им смежные углы (черт. 20). Пусть, далее, f — движение, при котором $\angle(h, k)$ отображается в $\angle(l, m)$. При этом движении развернутый $\angle(h, h')$ отобразится в развернутый $\angle(l, l')$. Отсюда следует, что $\angle(h', k)$ отобразится в $\angle(l', m)$, т. е. $\angle(h', k) = \angle(l', m)$.

Т е о р е м а. Существует биссектриса любого угла и притом единственная.

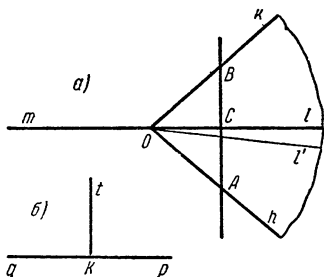
Пусть $\angle(h, k)$ отличен от развернутого и внутренняя его область выпукла. Отложим на его сторонах от вершины O равные отрезки OA и OB (черт. 21, а) и соединим точки A и B . В равнобедренном треугольнике AOB $\angle A = \angle B$ (§ 8). Соединяя середину C отрезка AB с точкой O , получим равные по первому признаку треугольники AOC и BOC . Следовательно, $\angle AOC = \angle BOC$, и поэтому луч OC — биссектриса $\angle(h, k)$.

Если $\angle(h, k)$ не является выпуклым (на чертеже внутренняя область его не заштрихована), то по предыдущей

теореме его биссектрисой является луч m , дополнительный к лучу l .

Из равенства треугольников ACO и BCO следует также, что $\angle ACO = \angle BCO$, т. е. луч CO является биссектрисой развернутого угла со сторонами CA и CB .

Пусть теперь дан развернутый $\angle(p, q)$ (черт. 21, б). Совершим движение, при котором развернутый $\angle ACB$ отображается в $\angle(p, q)$. Луч CO отображается при этом в луч t . Так как $\angle(p, t) = \angle BCO$, $\angle BCO = \angle ACO$ и $\angle ACO = \angle(q, t)$, то $\angle(p, t) = \angle(q, t)$, т. е. t — биссектриса $\angle(p, q)$.



Черт. 21.

Пусть l — биссектриса $\angle(h, k)$, а l' — произвольный луч, выходящий из вершины угла и лежащий во внутренней области его. Если l' лежит во внутренней области $\angle(h, l)$, то $\angle(h, l') < \angle(h, l)$ и $\angle(k, l') > \angle(k, l)$. Следовательно, $\angle(h, l') < \angle(k, l')$. Отсюда следует, что угол имеет единственную биссектрису. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. Существует один и только один перпендикуляр к данной прямой, выходящий из заданной на ней точки и лежащий в заданной полуплоскости, ограниченной этой прямой.

С л е д с т в и е 2. Половины равных углов равны между собой.

Действительно, если $\angle(h, k) = \angle(h', k')$, то существует движение f , при котором один из них отображается в другой. По доказанной теореме их биссектрисы l и l' при данном движении также должны отобразиться одна в другую. Поэтому $\angle(h, l) = \angle(h', l')$.

Так как все развернутые углы равны, то частным случаем следствия 2 является предложение: все прямые углы равны между собой.

Прямые a и b , образующие при пересечении прямые углы, называются *перпендикулярными* ($a \perp b$).

О т р а ж е н и е о т п р я м о й. Пусть прямая a лежит в плоскости α . Образованные при этом полуплоскости обозначим через λ и μ (черт. 22). Возьмем на прямой луч h

выходящий из точки O . По свойству 6 движений (§ 7) существует единственное движение, отображающее луч h сам в себя и полуплоскость λ в полуплоскость μ . Все точки этого луча по свойству 5 движений отображаются сами в себя. Все точки луча k , дополняющего до прямой луч h , тоже отображаются сами в себя.

Итак, при рассматриваемом движении все точки прямой a отображаются сами в себя. Легко, далее, видеть, что полуплоскость μ отображается при этом в полуплоскость λ .

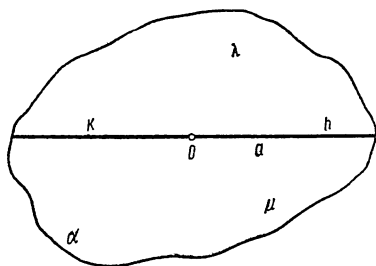
Рассматриваемое движение называется *отражением от прямой a* .

Из существования биссектрисы развернутого угла следует, что через любую точку, лежащую на прямой a , всегда можно провести прямую b , перпендикулярную к прямой a .

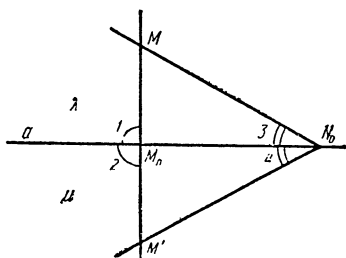
Возьмем теперь точку вне прямой a .

Т е о р е м а. *Через любую точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M — точка, лежащая вне прямой a (черт. 23). Прямая a делит плоскость, определяемую этой прямой и точкой M , на две полуплоскости: полуплоскость λ , содержащую точку M , и полуплоскость μ . При отражении от прямой a точка M отображается в точку M' полуплоскости μ . Так как точки M и M' лежат в разных полуплоскостях, то прямые MM' и a пересекаются в некоторой точке M_0 , которая при отражении отображается сама в себя. Отсюда следует, что прямая MM' отображается сама в себя, и поэтому углы 1 и 2, образованные ею с прямой a (см. черт. 23), отображаются один в другой.



Черт. 22



Черт. 23

Значит, эти углы равны, а так как они, кроме того, смежные, то $MM' \perp a$. Пусть теперь через M проведена другая прямая, пересекающая прямую a в некоторой точке N_0 . Она отобразится в прямую $M'N_0$, а $\angle MN_0M_0$ отобразится в $\angle M'N_0M_0$. Итак, $\angle 3 = \angle 4$. Но в силу аксиомы 1 (§ 2)

точки M , N_0 и M' не лежат на одной прямой, и поэтому сумма углов 3 и 4, т. е. $\angle MN_0M'$, не является развернутым углом. Отсюда вытекает, что углы 3 и 4 отличны от прямого и прямая MN_0 не будет перпендикулярна прямой a . Прямая MM' является, таким образом, единственной прямой, перпендикулярной a и проходящей через точку M .

В дальнейшем мы будем опираться на тот материал школьного курса геометрии, который достаточно обоснован в нем. Сюда, в частности, относятся различные предложения о треугольниках и четырехугольниках.

§ 10. Окружность

Совокупность всех точек плоскости, для которых отрезки, соединяющие их с данной точкой плоскости O , равны между собой, называется *окружностью*. Точка O — центр окружности. Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, называется *радиусом*.

Окружность с центром O и радиусом R будем в дальнейшем обозначать символом $O(R)$.

Две точки окружности A и B делят все остальные точки окружности на два класса:

первый класс — все точки, которые лежат внутри угла AOB ;

второй класс — все точки, которые лежат вне угла AOB .

Каждый из этих классов вместе с точками A и B называется дугой окружности. В дальнейшем дугу окружности будем называть дугой. Дугу окружности с концами A и B будем обозначать так: $\smile AB$.

Точка плоскости называется *внешней* точкой окружности, если отрезок, соединяющий ее с центром окружности, больше радиуса; точка плоскости называется *внутренней* точкой окружности, если указанный отрезок меньше радиуса. Центр окружности относится к внутренним точкам ее.

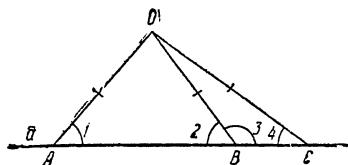
Очевидно, что все окружности с равными радиусами равны между собой.

Аксиома 1. Если один конец отрезка является внутренней точкой окружности, а другой — внешней точкой ее, то отрезок имеет с окружностью общую точку.

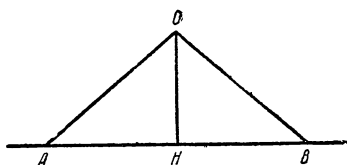
Аксиома 2. Если один конец дуги лежит внутри окружности, а другой — вне ее, то дуга имеет с окружностью общую точку.

Теорема. Прямая не может иметь с окружностью более двух общих точек.

Проведем доказательство методом от противного. Пусть три различные точки A , B и C принадлежат прямой a и окружности O . Точка O лежит вне прямой, так как иначе на прямой a от точки O были бы отложены три различных и равных отрезка, что невозможно (§ 8). Пусть на прямой a точка B лежит между точками A и C (черт. 24).



Черт. 24



Черт. 25

Треугольники AOB , BOC , и AOC — равнобедренные. Отсюда следует равенство углов этих треугольников:

$$\angle OAB = \angle OBA; \quad \angle OAC = \angle OCA.$$

Отсюда $\angle OBA = \angle OCA$, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника.

Рассмотрим прямую a и окружность O . Проведем через центр окружности O прямую b , перпендикулярную к прямой a . Такая прямая, как доказано выше, единственная. Пусть H — точка пересечения прямых b и a . Легко видеть, что отрезок OH меньше отрезка, соединяющего центр окружности с любой другой точкой прямой a . Пусть R — радиус окружности. Возможны три случая.

1. Если $OH > R$, то отрезок, соединяющий центр O с любой точкой прямой, больше R . Все точки прямой лежат вне окружности. Мы говорим, что прямая и окружность не пересекаются.

2. Если $OH = R$, то отрезок, соединяющий центр O с любой другой точкой прямой a , будет больше OH . Следовательно, прямая и окружность имеют единственную общую

точку H . Мы говорим, что прямая касается окружности в точке H .

3. Пусть теперь $OH < R$. Отложим на прямой по разные стороны H отрезки HA и HB , равные радиусу окружности R (черт. 25). Из прямоугольных треугольников OHA и OHB следует, что $OA > HA$ и $OB > HB$, т. е. $OA > R$ и $OB > R$. Из аксиомы 1 следует, что на каждом из этих отрезков существует точка окружности. Следовательно, прямая a имеет с окружностью в этом случае две общие точки P и Q . Мы говорим, что прямая пересекает окружность в этих точках. Легко доказать, что все внутренние точки отрезка PQ лежат внутри окружности, а точки прямой, лежащие вне его, лежат также вне окружности. Отсюда, далее, следует, что окружность делит плоскость на две области: внутреннюю, состоящую из внутренних точек окружности, и внешнюю, состоящую из внешних точек ее; внутренняя область является выпуклой, а внешняя нет.

Окружность вместе с ее внутренней областью называется *кругом*.

Методом доказательства от противного легко установить справедливость обратных предложений:

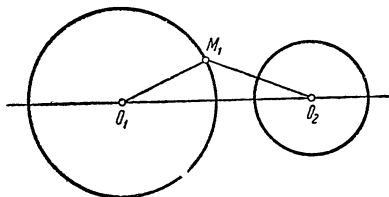
1. Если прямая не пересекает окружность, то $OH > R$,
2. Если прямая касается окружности, то $OH = R$.
3. Если прямая пересекает окружность, то $OH < R$.

§ 11. Две окружности

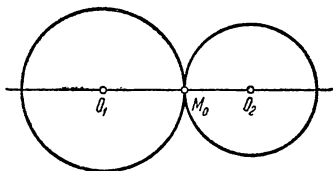
Пусть даны окружности $O_1 (R_1)$ и $O_2 (R_2)$; отрезок O_1O_2 , соединяющий их центры, обозначим через d . Кроме того, для определенности будем считать, что $R_1 \geq R_2$.

Исследуем различные возможные случаи взаимного расположения этих окружностей в зависимости от d .

1. $d > R_1 + R_2$ (черт. 26).



Черт. 26



Черт. 27

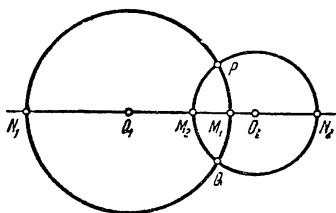
Пусть M_1 — произвольная точка первой окружности. Так как $O_2M_1 \geq O_1O_2 - O_1M_1$, то $O_2M_1 > (R_1 + R_2) - R_1$; $O_2M_1 > R_2$. Любая точка первой окружности лежит вне второй. Точно так же докажем, что любая точка второй окружности лежит вне первой.

Окружности не имеют общих точек, и всякая точка одной из них лежит вне другой.

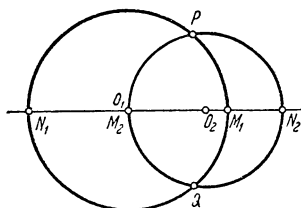
2. $d = R_1 + R_2$ (черт. 27).

На отрезке O_1O_2 возьмем точку M_0 так, что $O_1M_0 = R_1$. Тогда $O_2M_0 = R_2$ и M_0 — общая точка двух окружностей. Как и в первом случае, докажем, что любая другая точка одной окружности лежит вне другой.

Окружности, имеющие одну и только одну общую точку, называются *касаящимися*. В рассматриваемом случае мы имеем внешнее касание двух окружностей.



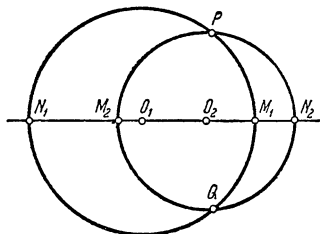
Черт. 28 а



Черт. 28 б

3. $R_1 + R_2 > d > R_1 - R_2$ (чертежи 28 а, б, в).

Прямая O_1O_2 пересекается с окружностью O_1 в точках M_1 и N_1 , а с окружностью O_2 — в точках M_2 и N_2 . Обозначение точек выберем так, чтобы M_1 и O_2 лежали по одну сторону от O_1 , а M_2 и O_1 — по одну сторону от O_2 . Тогда N_1 и O_2 будут лежать по разные стороны от O_1 , а N_2 и O_1 — по разные стороны от O_2 .



Черт. 28 в

Возможны три случая:
а) M_2 лежит между O_1 и O_2 ;
б) M_2 совпадает с O_1 ; в) O_1 лежит между M_2 и O_2 .

Во всех случаях $O_1N_2 = O_1O_2 + O_2N_2 = d + R_2$. Но $d > R_1 - R_2$. Следовательно, $O_1N_2 > R_1 - R_2 + R_2 = R_1$, т. е. точка N_2 лежит вне окружности O_1 . Докажем

теперь, что M_2 лежит внутри окружности O_1 .

Для первого случая

$$O_1M_2 = O_1O_2 - O_2M_2 = d - R_2.$$

Но $d < R_1 + R_2$. Отсюда:

$$O_1M_2 < R_1 + R_2 - R_2 = R_1.$$

Во втором случае M_2 совпадает с O_1 .

В третьем случае

$O_1M_2 = O_2M_2 - O_1O_2 = R_2 - d < R_1$, так как по предположению $R_1 \geq R_2$.

В силу аксиомы 2 (§ 10) каждая из двух полуокружностей M_2N_2 имеет с окружностью O_1 общую точку. Следовательно, данные две окружности имеют две общие точки. Мы говорим, что окружности *пересекаются*.

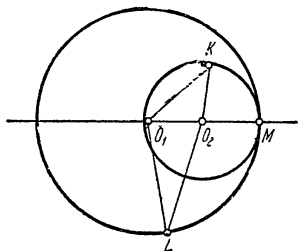
4. $d = 0$.

Если при этом $R_1 = R_2$, то окружности сливаются в одну.

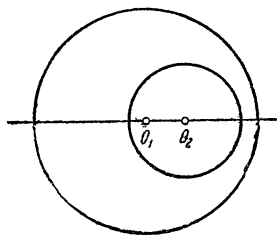
Если же $R_1 > R_2$, то окружности называются *концентрическими*. Все точки окружности O_2 лежат внутри окружности O_1 , а все точки окружности O_1 лежат вне O_2 .

5. $d = R_1 - R_2$, где $R_1 > R_2$ (черт. 29). Пусть M — точка пересечения линии центров с окружностью O_1 , лежащая с точкой O_2 по одну сторону от O_1 . Тогда O_2 будет лежать между O_1 и M . Имеем:

$$O_2M = O_1M - O_1O_2 = R_1 - (R_1 - R_2) = R_2.$$



Черт. 29



Черт. 30

Следовательно, M — общая точка окружностей O_1 и O_2 . Пусть K — любая точка окружности O_2 , а L — любая точка окружности O_1 , отличные от M . Тогда:

$$\begin{aligned} O_1K &< O_1O_2 + O_2K = R_1 - R_2 + R_2 = R_1, \\ O_2L &> O_1L - O_1O_2 = R_1 - (R_1 - R_2) = R_2. \end{aligned}$$

Таким образом, все остальные точки окружности O_2 лежат внутри окружности O_1 , а все остальные точки окружности O_1 лежат вне окружности O_2 .

В рассматриваемом случае мы имеем внутреннее касание двух окружностей.

6. $R_1 - R_2 > d$, где $R_1 > R_2$ (черт. 30).

Легко доказать, что окружности не имеют общих точек; точки окружности O_2 лежат внутри окружности O_1 , а точки окружности O_1 — вне окружности O_2 .

Этим исчерпываются все возможные случаи расположения двух окружностей. Отсюда следует:

1) если две окружности касаются, то имеем или случай 2 (внешнее касание), или случай 5 (внутреннее касание). Следовательно, точка касания двух окружностей лежит на линии центров;

2) если две окружности пересекаются, то имеем случай 3, т. е. $R_1 + R_2 > d > R_1 - R_2$ ($R_1 \geq R_2$);

3) если две окружности не имеют общих точек, то имеем один из остальных случаев.

§ 12. Параллельные прямые

Из теоремы о внешнем угле треугольника, известной из школьного курса, легко сделать вывод, что сумма двух углов треугольника меньше развернутого угла.

Действительно, если $\angle ACD$ внешний для $\triangle ABC$, то $\angle ACD > \angle B$. Отсюда:

$$\angle ACD + \angle ACB > \angle B + \angle ACB,$$

или

$$2d > \angle B + \angle ACB.$$

Отсюда следует, что для построения треугольника по двум углам и прилежащей к ним стороне необходимо, чтобы сумма этих углов была меньше развернутого угла. Является ли это условие достаточным для данного построения?

Этот вопрос можно поставить несколько иначе. Пусть α и β — внутренние односторонние углы, образованные при пересечении прямых a и b , лежащих в одной плоскости, прямой c .

Если $\alpha + \beta = 2d$, то прямые a и b не пересекаются (черт. 31). Действительно, если предположить противное, то отсюда будет следовать существование треугольника,

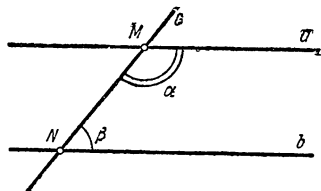
у которого сумма двух углов равна развернутому, что невозможно.

Прямые a и b , лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, называются параллельными ($a \parallel b$).

Нам поставлен вопрос: всегда ли прямые a и b пересекаются, если $\alpha + \beta < 2d$? Очевидно, что имеются две возможности для ответа:

1. Если $\alpha + \beta < 2d$, то прямые a и b пересекаются.
2. Существуют такие углы α и β , при которых прямые a и b не пересекаются, хотя $\alpha + \beta < 2d$.

Евклид в своих «Началах» без доказательства принял первое предложение (пятый постулат Евклида). В течение более 2000 лет предпринимались многочисленные и безуспешные попытки доказать это предложение. История этих попыток чрезвычайно интересна и поучительна.



Черт. 31

Только в начале XIX в. великий русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856) дал исчерпывающий ответ на поставленный вопрос, причем ответ, совершенно неожиданный для современников. Вывод, к которому пришел Лобачевский, таков: ни первое, ни второе предложения не являются следствием остальных аксиом геометрии. Отсюда следует, что нельзя доказать на основе приведенных нами аксиом ни первое предложение (пятый постулат), ни второе предложение. Само собой разумеется, что нельзя таким путем показать несправедливость ни одного из этих предложений, так как, отвергая одно предложение, мы этим утверждаем другое.

Таким образом, мы должны сделать вывод, что приведенный нами список аксиом недостаточен для построения курса геометрии. Для решения поставленного вопроса необходимо ввести новую аксиому. В качестве такой аксиомы Евклид принял первое предложение и построил курс той геометрии, которую мы изучаем в школе.

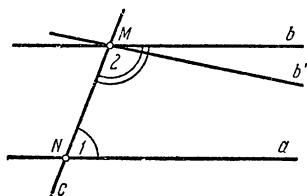
Лобачевский показал, что в качестве этой новой аксиомы можно принять второе предложение. Приняв такую аксиому, Лобачевский построил новую геометрию, носящую его имя (геометрия Лобачевского). Эта геометрия во многом

резко отличается от геометрии Евклида, однако в ограниченной части пространства, доступной нашим измерениям, она так же хорошо согласуется с опытом, как и геометрия Евклида. Последняя выступает в качестве очень точного приближения геометрии Лобачевского в доступной нам части пространства. Так как геометрия Евклида значительно проще и удобнее для изучения геометрических свойств окружающих нас реальных предметов, чем геометрия Лобачевского, то мы изучаем ее в первую очередь.

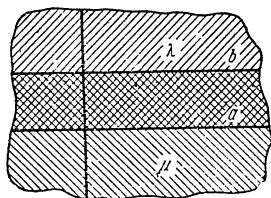
Обычно вместо пятого постулата Евклида в качестве аксиомы принимается следующее предложение.

Аксиома (аксиома параллельности). *Через точку, лежащую вне прямой, нельзя провести двух прямых, параллельных данной прямой.*

Пусть дана прямая a и точка M вне ее (черт. 32). Проведем через M прямую c , пересекающую a в некоторой точке N . Затем проведем через M прямую b так, чтобы сумма образованных прямыми a и b внутренних односторонних углов 1 и 2 была равна развернутому углу. Тогда $b \parallel a$. Аксиома утверждает, что любая другая прямая b' , проходящая через M и лежащая в той же плоскости, в которой расположены прямые a и b , пересекает прямую a . Отсюда, как легко видеть, вытекает пятый постулат Евклида.



Черт. 32



Черт. 33

Следствия из этой аксиомы считаем известными из школьного курса.

Пусть a и b — параллельные прямые, расположенные в плоскости α . Все точки каждой из них расположены в этой плоскости по одну сторону от другой прямой. Пусть, далее, λ — полуплоскость, ограниченная прямой a и содержащая прямую b , а μ — полуплоскость, ограниченная прямой b и содержащая прямую a . Пересечение полуплоскостей λ и

мы назовем *полосой* (черт. 33), а прямые a и b — *границами* *полосы*.

Очевидно, что полоса является выпуклой фигурой (§ 4).

Отрезки прямых, перпендикулярных границам полосы, заключенные внутри полосы, равны между собой. Каждый из них называется *шириной* полосы.

ГЛАВА II

ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 13. Построения на плоскости при помощи циркуля и линейки

Во всякой геометрической задаче на построение (конструктивной задаче) имеются данные элементы — определенные геометрические фигуры (точки, прямые, окружности, отрезки, углы и т. д.). Будем называть их данными конструктивными элементами. Кроме того, будем пользоваться произвольными точками плоскости, которые нами приобщаются к данным элементам и этим включаются в класс конструктивных элементов.

Совокупность данных конструктивных элементов и приобщенных к ним мы будем пополнять новыми конструктивными элементами следующим образом:

1. Конструктивной считается прямая, проходящая через две конструктивные точки.

2. Конструктивной считается общая точка двух конструктивных прямых (если она существует).

3. Конструктивной считается окружность, определенная конструктивным центром и конструктивным радиусом (отрезок, соединяющий две конструктивные точки).

4. Конструктивными считаются общие точки конструктивной прямой и конструктивной окружности (если они существуют).

5. Конструктивными считаются общие точки двух конструктивных окружностей (если они существуют).

В задаче на построение выражается требование построить некоторую фигуру. Построить искомую фигуру при помощи циркуля и линейки — это значит включить ее в класс конструктивных элементов путем последовательного присоединения к этому классу точек, прямых и окружностей указанным выше образом.

В каждом из перечисленных выше случаев мы будем говорить о выполнении соответствующего элементарного построения. Таким образом, мы имеем следующие пять элементарных построений:

1. Построение прямой, проходящей через две конструктивные точки. Возможность этого построения установлена аксиомой 1 (§ 2).

2. Построение точки пересечения двух конструктивных прямых (если они пересекаются).

Считаем, что эти два элементарных построения осуществляются при помощи линейки, которая является абстрактным образом чертежной линейки. Таким образом, к линейке в геометрии мы приходим путем абстракции реального инструмента, употребляемого в черчении. При помощи последнего мы на чертеже проводим реальные отрезки. От этих реальных построений путем абстракции переходим к указанным элементарным геометрическим построениям.

3. Построение окружности с конструктивным центром и конструктивным радиусом.

Считаем, что это построение выполняется при помощи абстрактного инструмента — циркуля, к которому приходим путем абстракции реального чертежного циркуля.

4. Построение точек пересечения (если они существуют) конструктивной окружности и конструктивной прямой.

Считаем, что это построение выполняется при помощи совместного применения линейки и циркуля.

5. Построение точек пересечения двух конструктивных окружностей (если они существуют).

Считаем, что это построение выполняется при помощи циркуля.

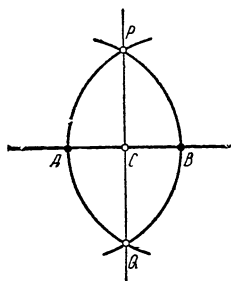
Вопрос о существовании точек пересечения в последних двух построениях разрешен выше при рассмотрении взаимного расположения прямой и окружности и двух окружностей.

Построение при помощи циркуля и линейки некоторой фигуры, следовательно, заключается во включении ее в класс конструктивных элементов путем последовательного выполнения конечного числа перечисленных элементарных построений.

П р и м е р. Построить середину данного отрезка AB (черт. 34). Точки A и B являются данными конструктивными элементами. Строим прямую AB (построение 1). Затем строим окружности $A(AB)$ и $B(BA)$ (построение 3). Так

как эти окружности пересекаются (§ 11, случай 3), то выполнимо построение 5, после которого точки их пересечения P и Q становятся конструктивными. Далее, строим прямую PQ (построение 1) и точку C , в которой она пересекается с прямой AB (построение 2). Как известно, C — середина отрезка AB . Эта точка стала конструктивной. Следовательно, задача решена.

Ряд простейших задач на построение, к которым обычно сводятся более сложные задачи, рассмотрен в школьных учебниках. Их называют обычно «основными построениями». Задачу считают решенной, если она сведена к этим «основным построениям».



Черт. 34

К основным построениям относятся обычно следующие задачи:

1. Построение треугольника по трем основным элементам (сторонам и углам), из которых хотя бы один элемент является его стороной.
2. Построение угла, равного данному.
3. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой.
4. Деление отрезка на равные части.
5. Деление угла пополам (построение биссектрисы угла).
6. Построение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку.
7. Построение прямой, проходящей через данную точку и касающейся данной окружности.
8. Построение сегмента, вмещающего данный угол.

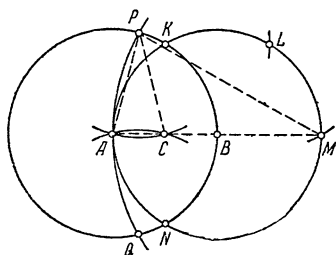
Решение этих задач известно из школьного курса.

Если искомую фигуру можно включить в класс конструктивных элементов посредством конечного числа указанных пяти элементарных построений, то задача считается разрешимой при помощи циркуля и линейки. Если же этого сделать нельзя, то задача является неразрешимой при помощи этих инструментов. Вопрос о том, как определить, является ли данная задача разрешимой, будет рассмотрен дальше. Классическим примером задачи, неразрешимой при помощи циркуля и линейки, является задача о делении произвольного угла на три равные части.

§ 14. Понятие о построениях при помощи одного циркуля

При построении середины отрезка мы не использовали элементарного построения 4. Оказывается, ту же задачу можно решить, не применяя также элементарных построений 1 и 2. Это значит, что середину данного отрезка можно включить в класс конструктивных элементов путем последовательного выполнения только элементарных построений 3 и 5. Дадим это построение.

Пусть A и B — концы данного отрезка (черт. 35). Построим две окружности $A(AB)$ и $B(BA)$ (построение 3).



Черт. 35

Эти окружности пересекаются в некоторых точках K и N (построение 5). Строим, далее, окружность $K(KA)$ (построение 3) и точку L , в которой она пересекается с окружностью B (построение 5). Затем строим окружность того же радиуса, но с центром в точке L (построение 3). K и M — точки пересечения ее с окружностью B . Легко видеть, что точки

A и M являются концами диаметра окружности B , т. е. $AM = 2 AB$.

Строим теперь окружность с центром M и радиусом MA (построение 3), эта окружность пересечется с окружностью A в некоторых точках P и Q (построение 5). Наконец, строим окружности с центрами в точках P и Q радиусом AB (построение 3). Они пересекутся в точках A и C (построение 5). Построенная таким способом точка C является искомой серединой отрезка AB .

Доказательство. Так как точки A , C и M одинаково удалены от точек P и Q , то все они лежат на одной прямой, на которой лежит и точка B . $\triangle APC \sim \triangle APM$, так как эти треугольники равнобедренные и $\angle PAM$ у них общий. Отсюда:

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AP}{AM}, \quad AC = \frac{AP}{AM} \cdot AP = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} AB.$$

Датский математик М о р (1672) и независимо от него итальянский математик М а с к е р о н и (1797) доказали, что все задачи на построение, разрешимые при помощи циркуля и линейки, являются также разрешимыми при помощи одного циркуля. Прямая при этом считается конструктивной, если она определена двумя конструктивными точками. Однако нельзя пользоваться линейкой для построения точек пересечения двух прямых и прямой с окружностью, т. е. нельзя уже считать построения 2 и 4 элементарными. Эти два построения, как будет доказано в § 53, могут быть сведены к конечному числу построений 3 и 5.

Итак, если фигура может быть включена в класс конструктивных элементов при помощи элементарных построений 1—5, то она войдет в этот класс и при помощи элементарных построений 1, 3 и 5.

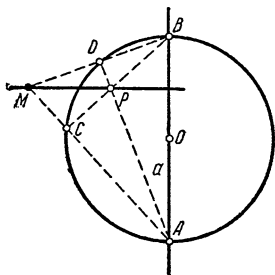
§ 15. Понятие о построениях при помощи одной линейки

Как мы видели в предыдущем параграфе, элементарные построения 1—5 не являются независимыми между собой. Это значит, что одни из этих построений можно свести к другим. Так, можно свести построения при помощи линейки и циркуля к построениям при помощи только одного циркуля. Встает вопрос о других возможностях в этом направлении. Нельзя ли свести построения при помощи линейки и циркуля к построениям при помощи одной линейки? Немецкий геометр Ш т е й н е р (1833) рассмотрел такого рода построения и пришел к очень интересным выводам. Оказывается, что все задачи, разрешимые при помощи циркуля и линейки, являются разрешимыми также при помощи одной линейки, если в число конструктивных элементов включить произвольную окружность и ее центр и пользоваться точками пересечения ее с конструктивными прямыми. Любая другая окружность считается при этом построенной (конструктивной), если конструктивны ее центр и радиус.

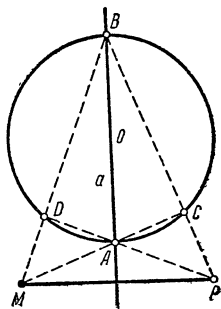
Элементарными построениями, следовательно, мы будем считать построения 1—3 и следующее построение:

4*. Построение точек пересечения (если они существуют) конструктивной прямой и данной неподвижной окружности с отмеченным центром (эта окружность и центр ее являются конструктивными элементами).

З а д а ч а. Дана окружность O и прямая a , проходящая через ее центр. Через данную точку M , не лежащую на прямой a , провести прямую, перпендикулярную к данной прямой (черт. 36 а, б).



Черт. 36 а



Черт. 36 б

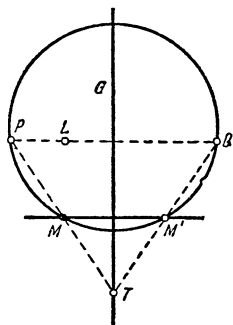
Пусть A и B — точки пересечения прямой a с данной окружностью (построение 4*). Если прямая MA (или MB) касается окружности, то она будет перпендикулярна AB , т. е. будет искомой прямой. Исключим этот случай. Пусть M лежит вне окружности.

Строим прямые MA и MB (построение 1) и точки пересечения их с данной окружностью — точки C и D (построение 4*). Строим, далее, прямые AD и BC (построение 1). Очевидно, что $BC \perp AM$ и $AD \perp BM$. Прямые BC и AD пересекаются, так как они перпендикулярны разным сторонам $\angle AMB$, который не является развернутым. Строим точку их пересечения P (построение 2). Для $\triangle AMB$ точка P является точкой пересечения двух

высот (или их продолжений). Поэтому третья высота (или ее продолжение) этого треугольника тоже пройдет через P . Строим прямую MP (построение 1), которая будет искомой.

Если M лежит внутри окружности, то построение проводим в том же порядке.

Пусть M лежит на окружности (черт. 37). Через произвольную точку L , лежащую внутри окружности, проводим прямую, перпендикулярную



Черт. 37

прямой a , так, как было рассмотрено выше. Строим точки пересечения ее с окружностью — точки P и Q . Проводим прямую PM и строим точку пересечения ее с прямой a — точку T . Затем проводим прямую QT , строим вторую точку пересечения ее с окружностью — точку M' и, наконец, строим прямую MM' , которая будет искомой. Доказательство легко усмотреть из симметрии чертежа относительно прямой a .

§ 16. Построения при помощи двусторонней линейки

Под двусторонней линейкой будем понимать инструмент, при помощи которого можно строить полосу раз навсегда данной ширины δ (§ 12). К этому инструменту приходим путем абстракции реальной чертежной линейки с параллельными краями. Понятно, что двусторонняя линейка приводит к иным элементарным построениям, чем циркуль и односторонняя линейка. Теперь мы будем включать в класс конструктивных элементов прямую, параллельную конструктивной прямой и образующую с ней полосу ширины δ . Кроме того, будем считать конструктивными такие две пары параллельных прямых, каждая из которых удовлетворяет условиям:

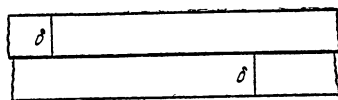
- 1) прямые образуют полосу ширины δ ;
- 2) одна из прямых проходит через конструктивную точку A , другая — через конструктивную точку B , где $AB > \delta$.

Таким образом, мы приходим к следующим элементарным построениям:

1. Построение прямой, проходящей через две конструктивные точки.

2. Построение точки пересечения двух конструктивных прямых.

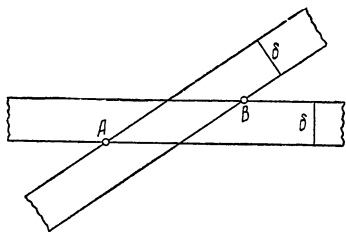
3. Построение прямой, образующей с конструктивной прямой полосу ширины δ (черт. 38).



Черт. 38

4. Построение двух пар параллельных прямых, удовлетворяющих указанным выше условиям 1) и 2) (черт. 39).

Фигура считается построенной при помощи двусторонней линейки, если она включена в класс конструктивных эле-



Черт. 39

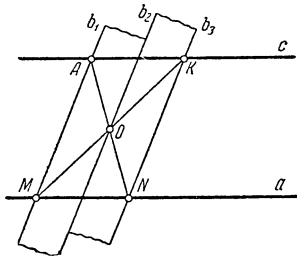
ментов при помощи последовательного выполнения конечного числа элементарных построений 1—4.

Приведем примеры построений при помощи двусторонней линейки.

Задача 1. Построить прямую, параллельную данной прямой a и прохо-

дящую через данную точку A (черт. 40).

Через точку A и произвольную точку M прямой a строим прямую b_1 . Затем строим прямую b_2 , параллельную b_1 и образующую с ней полосу ширины δ . Таким же путем строим прямую b_3 , параллельную b_2 (см. чертеж). Далее, строим точку N , в которой пересекаются прямые a и b_3 , прямую AN , точку O , в которой последняя прямая пересекается с b_2 , прямую MO и точку пересечения ее с прямой b_3 — точку K . Наконец, проводим прямую AK , которая, как легко видеть, будет иско-мой (так как диагонали четырехугольника $AKNM$

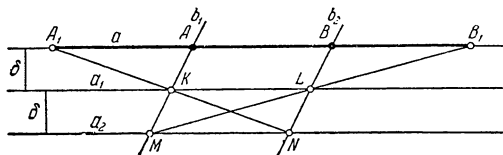


Черт. 40

в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник является параллелограммом).

Задача 2. Удвоить данный отрезок AB (черт. 41).

Строим прямую a , проходящую через точки A и B . Через точку A проводим произвольную прямую b_1 , отлич-



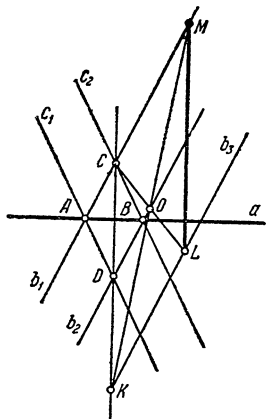
Черт. 41

ную от a , а через B — прямую b_2 , параллельную b_1 (задача 1). Строим затем две полосы ширины δ , примыкающие друг к другу и ограниченные одна прямыми a и a_1 , а другая

прямыми a_1 и a_2 . Через точки M и L , в которых прямые a_1 , a_2 пересекаются с прямыми b_1 и b_2 , проводим прямую и отмечаем точку B_1 , в которой она пересекается с прямой a . Легко видеть, что $BB_1 = AB$. Так же строится отрезок $AA_1 = AB$.

Задача 3. Через точку M провести прямую, перпендикулярную данной прямой a (черт. 42).

Через точку M и произвольную точку A прямой a проводим прямую b_1 ; затем строим две полосы ширины δ , ограниченные прямыми b_1 , b_2 и b_2 , b_3 . Пусть прямая b_2 пересекается с прямой a в точке B . Через A и B проводим вторую пару параллельных прямых c_1 и c_2 (построение 4), образующих полосу ширины δ . Обозначим через C и D точки пересечения их с прямыми b_1 и b_2 . Так как в параллелограмме $ACBD$ высоты равны, то он является ромбом. Следовательно, $CD \perp a$. Остается построить прямую, проходящую через M и параллельную CD (задача 1). Дальнейшее построение ясно из чертежа.



Черт. 42

§ 17. О методах решения задач на построение

Основным и обычно наиболее трудным моментом решения задачи на построение является отыскание той цепочки элементарных и основных построений, при помощи которых искомая фигура включается в класс конструктивных элементов. Если данные конструктивные элементы мы будем различными возможными способами пополнять новыми при помощи элементарных построений, то может оказаться построенной и искомая фигура. Тогда мы сможем выделить искомую цепочку построений, т. е. решить задачу. Такой метод явно не применим для решения задач на построение. Действительно, при решении таких задач мы данные конструктивные элементы пополняем обычно еще произвольными элементами (точками, отрезками), что можно сделать бесконечным числом способов. Отсюда следует возможность бесконечного числа комбинаций при приобщении но-

вых элементов к конструктивным, среди которых вряд ли окажется необходимая.

Обычно при отыскании искомой цепочки построений мы исходим из искомой фигуры, выделяем в ней элементы, построение которых обеспечивает решение задачи, и находим связи этих искомых элементов с данными конструктивными элементами. Пользуясь этими связями, мы устанавливаем необходимые основные и элементарные построения и их последовательность для построения искомой фигуры. Эта часть решения задачи называется *анализом*.

При анализе обычно пользуются *чертежом* - наброском искомой фигуры вместе с данными элементами, отказываясь при этом от точного изображения последних. В школьной практике этот чертеж можно рекомендовать выполнять полностью или частично от руки. На чертеже-наброске выделяются данные и искомые элементы, после чего устанавливаются связи между ними. Для установления последних часто проводятся вспомогательные линии, при помощи которых данные и искомые элементы оказываются частями фигур, свойства которых нам известны.

Установив при помощи анализа необходимые связи, мы переходим ко второй части решения задачи, называемой *построением*. Построение заключается во включении искомой фигуры в класс конструктивных элементов посредством найденной цепочки элементарных и основных построений. Эта часть решения сопровождается построением *чертежа решения* при помощи соответствующих чертежных инструментов.

Следующей частью решения является *доказательство*. Здесь мы устанавливаем, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

Заключительным этапом решения задачи на построение является *исследование*. Целью исследования является выяснение, при каких данных искомая фигура существует, сколько при определенных данных существует решений, какие при этом могут встретиться частные случаи, требующие особого решения.

Рассмотрим на примере процесс решения задачи на построение.

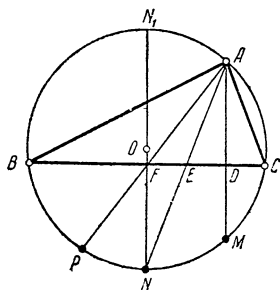
Задача. Дана окружность и на ней три различные точки M , N и P , в которых пересекаются с окружностью продолжения высоты, биссектрисы и медианы, исходящие

из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

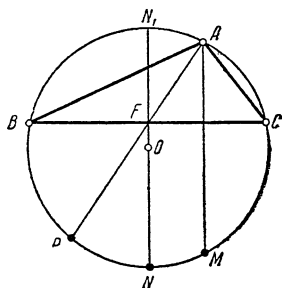
Данные элементы: окружность с центром O , точки M , N и P на этой окружности (черт. 43 б).

Искомые элементы: точки A , B и C на окружности O , являющиеся вершинами искомого треугольника.

А н а л и з. Строим чертеж-набросок. Впишем в окружность O произвольный $\triangle ABC$ и будем считать его искомым



Черт 43 а



Черт. 43 б

(черт. 43 а). Из вершины A проведем высоту AD , биссектрису AE и медиану AF . Пусть продолжения их пересекают окружность в точках M , N и P . Эти точки будем считать данными элементами.

Данные и искомые элементы связаны следующим образом:

- 1) $AM \perp BC$, так как AD — высота $\triangle ABC$;
- 2) $\cup BN = \cup NC$, так как $\angle BAN = \angle NAC$;
- 3) отрезки AP и BC пересекаются в точке F , являющейся серединой отрезка BC .

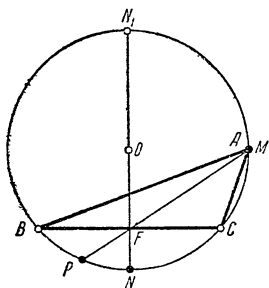
Замечаем, что центр O , являющийся данным элементом, не связан явным образом с искомыми элементами. Для установления этих связей проведем диаметр NN_1 . Так как дуги BN и NC равны, то диаметр NN_1 пересекает отрезок BC в его середине F и перпендикулярен этому отрезку. Отсюда следует, что $NN_1 \parallel AM$.

Диаметр NN_1 определен данной точкой N , хорда AM определена точкой M и условием параллельности ее диаметру NN_1 . Этим определяется точка A . Точка F является точкой пересечения диаметра NN_1 и хорды AP . Она может быть поэтому построена, как только будет построена точка A . Наконец, точки B и C определяются как концы хорды, перпендикулярной диаметру NN_1 и проходящей через точку F .

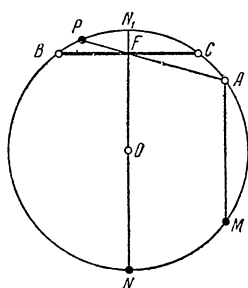
Построение (черт. 43 б). Строим диаметр NN_1 (элементарные построения 1 и 4), прямую, проходящую через точку M и параллельную этому диаметру (основное построение), и вторую точку A , в которой она пересекается с окружностью (элементарное построение 4). Строим, далее, прямую AP и точку F , в которой она пересекает диаметр NN_1 (элементарные построения 1 и 2). Через точку F проводим прямую, перпендикулярную диаметру NN_1 (основное построение), и отмечаем точки B и C , в которых она пересекается с окружностью (элементарное построение 4). Наконец, строим $\triangle ABC$.

Доказательство. Докажем, что $\triangle ABC$ является искомым. По построению он вписанный. Так как хорда BC перпендикулярна диаметру NN_1 , то $BF = FC$ и $\cup BN = \cup NC$. Следовательно, AF — медиана $\triangle ABC$, а луч AN — биссектриса $\angle BAC$. Наконец, $AM \perp BC$, так как $AM \parallel NN_1$. $\triangle ABC$ удовлетворяет условиям задачи.

Исследование. Из построения вытекает единственность точек A , B и C . Следовательно, решение единственное, если оно существует.



Черт. 43 в



Черт. 43 г

Если точки P и M лежат по одну сторону прямой NN_1 , то хорда AP не пересекается с диаметром NN_1 и поэтому решение невозможно. Будем считать в дальнейшем, что точки M и P лежат по разные стороны от прямой NN_1 .

Если $\cup NM = \cup N_1M$, то точка A совпадает с M (черт. 43 в).

Если $\cup MNP$ меньше полуокружности, то $\angle PAM$ — острый и поэтому $\angle AFN_1$ — тоже острый. В этом случае точки A и N лежат по разные стороны прямой BC , луч AN пере-

секает сторону BC и поэтому явится биссектрисой $\angle BAC$ треугольника ABC . Задача имеет решение.

Если же $\cup MNP$ больше полуокружности, то $\angle PAM$ — тупой (черт. 43 г). Решения в этом случае не будет, так как луч AN не пересечет хорду BC .

Если, наконец, $\cup MNP$ равна полуокружности, то $\triangle ABC$ вырождается в хорду (черт. 43 д).

В ы в о д. Задача имеет единственное решение, если точки P и M лежат по разные стороны от прямой NN_1 и дуга MNP меньше полуокружности; при несоблюдении этих условий задача не имеет решения.

В процессе анализа при отыскании решения используются особые приемы, получившие название методов решения геометрических задач на построение.

Если установление связей между данными и искомыми элементами проводится на основе метрических соотношений, то имеем алгебраический метод решения задач на построение. При этом методе длины искоемых отрезков выражаются в виде формул через длины данных отрезков. На основе этих формул устанавливаются необходимые построения для получения решения. Подробно этот метод будет рассмотрен ниже, в § 50.

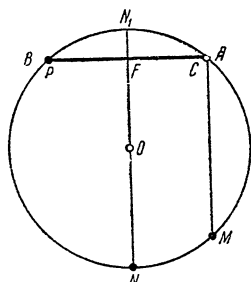
При решении задач на построение часто используются геометрические преобразования всей фигуры или ее отдельных элементов. В зависимости от характера преобразования различаются отдельные методы геометрических построений. К ним относятся методы переноса, симметрии и подобия, которые рассмотрим ниже, в § 28 и 41.

В § 49 будет показано применение особого преобразования, называемого инверсией, к решению некоторых задач.

§ 18. «Метод геометрических мест»

Большое значение для геометрических построений имеет «Метод геометрических мест». Рассмотрим его особо.

Пусть искомым элементом является точка M . Свяжем с ней две фигуры F_1 и F_2 , пересекающиеся в этой точке. Тог-



Черт. 43 д

да задача сводится к построению этих фигур, что может оказаться более легко выполнимым.

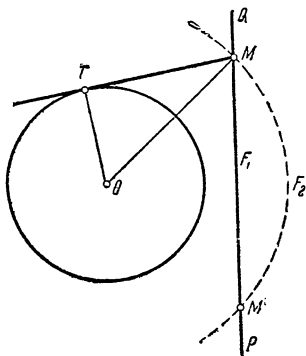
Для отыскания фигур F_1 и F_2 можно воспользоваться следующим приемом. Пусть точка M определена условиями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Отбросим условие α_1 и будем искать множество точек, удовлетворяющих остальным условиям. Это множество образует фигуру F_1 . Отбросим вместо условия α_1 условие α_2 и будем теперь искать множество точек, удовлетворяющих условиям $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Это второе множество точек образует фигуру F_2 .

Множество точек, удовлетворяющих определенным условиям, мы называли (§ 4) геометрическим местом точек, удовлетворяющих этим условиям. В силу этого фигура F_1 является геометрическим местом точек, удовлетворяющих условиям $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, а фигура F_2 — геометрическим местом точек, удовлетворяющих условиям $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Таким образом, задача сводится к определению первого и второго геометрических мест точек и их построению по условиям задачи. Искомая точка M является точкой пересечения этих геометрических мест.

Описанный метод решения задач на построение называется методом геометрических мест. Рассмотрим примеры применения этого метода.

Задача 1. На данной прямой PQ построить такую точку M , чтобы касательная, проведенная из нее к данной окружности, имела данную длину (считая от точки M до точки касания).

Анализ (черт. 44). Пусть M — искомая точка. Она является точкой пересечения прямой PQ (фигура F_1) и окружности с центром O и радиусом OM (фигура F_2). OM является гипотенузой прямоугольного треугольника OMT , в котором катет OT представляет радиус данной окружности, а катет TM равен данному отрезку. Построив любой прямоугольный треугольник, равный $\triangle OTM$, по данным катетам, мы определим радиус окружности F_2 . Построив последнюю, мы найдем точки пересечения ее с данной прямой и этим решим задачу.



Черт. 44

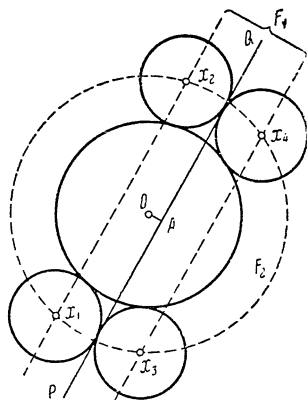
В рассмотренной задаче геометрическими местами точек являются прямая F_1 и окружность F_2 . К окружности F_2 мы придем, отбросив условия принадлежности точки M прямой F_1 . Следовательно, F_2 является геометрическим местом точек M , удовлетворяющих условию: касательная, проведенная из точки M к данной окружности, имеет данную длину (от точки M до точки касания).

Задача 2. Построить окружность данного радиуса a , касающуюся внешним образом данной окружности O и данной прямой PQ .

Анализ (черт. 45). Центр X искомой окружности определяется условиями:

- а) окружность X касается данной прямой PQ ;
- б) окружность X касается внешним образом окружности O ;
- в) окружность X имеет данный радиус a .

Отбросив условие б, придем к геометрическому месту точек F_1 —совокупности всех центров окружностей данного радиуса a , касающихся данной прямой PQ . Легко видеть, что фигура F_1 представляет совокупность двух прямых, параллельных прямой PQ и расположенных от нее по разные стороны на данном расстоянии a . Отбросив условия а, придем ко второму геометрическому месту точек F_2 —совокупности всех центров окружностей данного радиуса a , касающихся данной окружности O внешним образом. Как вытекает из § 11, F_2 представляет окружность, концентрическую с окружностью O и имеющую радиус, равный сумме радиуса данной окружности и данного отрезка a .



Черт. 45

Построение легко вытекает из проведенного анализа.

При решении задач методом геометрических мест упрощается исследование. Число решений оказывается равным числу общих точек двух полученных геометрических мест. Если эти геометрические места не имеют общих точек, то задача не имеет решения (нуль решений).

В рассматриваемой задаче геометрические места F_1 и F_2 могут иметь самое большее четыре общие точки (этот случай представлен черт. 45). Значит, задача имеет самое большее четыре решения. При увеличении расстояния OA от центра окружности O до прямой PQ число общих точек фигур F_1 и F_2 , постепенно уменьшаясь, сведется к нулю. В соответствии с этим задача может иметь любое число решений от четырех до нуля (нет решений).

Для успешного использования этого метода большое значение имеет знание различных геометрических мест и умение отыскивать геометрические места по данным условиям.

Простейшие геометрические места рассматриваются в школьном курсе. Примеры более сложных геометрических мест будут даны ниже (§ 43, 45).

Г Л А В А И I I I

ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 19. Общие свойства движений

В § 7 мы ознакомились с понятием движения. Приступим теперь к изучению отдельных видов движений.

Если движение f_2 выполнено после движения f_1 , то, по свойству 3, результирующее преобразование будет тоже движением f' , которое называется *произведением движения f_2 на f_1* .

Пусть вслед за этим совершено еще движение f_3 . Мы получим новое движение f , которое будет произведением движения f_3 на f' :

$$f = f_3 \cdot f'.$$

Употребляя скобки, можно записать этот результат так:

$$f = f_3 (f_2 f_1).$$

Движение f мы назовем произведением движений f_1 , f_2 и f_3 , взятых в указанном выше порядке, и запишем так:

$$f = f_3 f_2 f_1.$$

Рассмотрим наряду с этим движение f^* , определяемое как произведение движения $f'' = f_3 f_2$ на движение f_1 :

$$f^* = f'' f_1 = (f_3 f_2) f_1.$$

Докажем, что движения f и f^* совпадают. Возьмем произвольную точку M . Пусть:

движение f_1 отображает M в точку M_1 ,

движение f_2 отображает M_1 в точку M_2 ,

движение f_3 отображает M_2 в точку M_3 .

Тогда f' отображает M в M_2 , а f'' отображает M_1 в M_3 . Следовательно, движение $f = f_3 f'$ отобразит M в M_3 , и то же самое даст движение $f^* = f'' f_1$. Значит, $f^* = f$. Мы доказали, таким образом, равенство: $f_3 (f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1$, которое выражает свойство сочетательности произведения движений. Итак, имеем т е о р е м у: *произведение движений обладает свойством сочетательности.*

Определив произведение трех движений, легко определить произведение четырех движений как движение:

$$f = f_4 (f_3 f_2 f_1) = f_4 f_3 f_2 f_1.$$

Идя этим путем дальше, легко определить произведение любого числа движений. Основываясь на свойстве сочетательности, можно сделать вывод, что такое произведение не изменится, если сомножители заключить в скобки произвольным образом, не меняя их порядка. Например,

$$f_5 [(f_4 f_3) f_2] f_1 = (f_5 f_4) f_3 (f_2 f_1).$$

Множество движений мы назовем группой, если в него входят:

- 1) *произведение любых двух движений данного множества (свойство замкнутости);*
- 2) *тождественное движение f_0 ;*
- 3) *движение f^{-1} , обратное произвольному движению f данного множества.*

Множество движений, состоящее только из тождественного движения f_0 , также является группой, так как

$$f_0 f_0 = f_0$$

и поэтому условия 1 и 3 выполнены.

Заметим, что условие 2 вытекает из условий 1 и 3, если группа движений содержит движение f , отличное от тождественного (по условию 3 группа содержит обратное движение, а по условию 1 — произведение $f \cdot f^{-1} = f_0$).

Группой является множество всех движений. Легко видеть также, что группой является множество движений, отображающих некоторую плоскость α самое в себя. Эту группу движений назовем *г р у п п о й д в и ж е н и я н а*

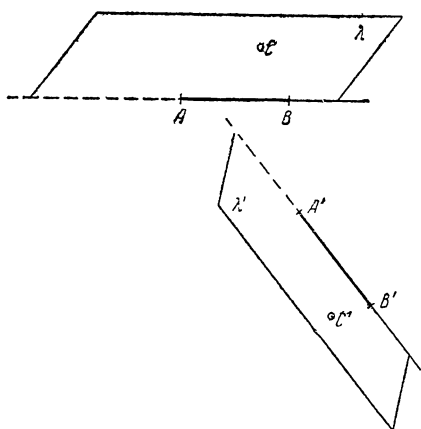
плоскости. Ниже ознакомимся с другими примерами групп движений.

Существует бесчисленное множество движений, отображающих две какие-либо точки A и B в A' и B' . Действительно, эти точки определяют лучи AB и $A'B'$, а так как существует бесчисленное множество полуплоскостей, ребрами которых являются прямые AB и $A'B'$, то существует бесчисленное множество движений, отображающих луч AB в луч $A'B'$ (свойство 6, § 7).

Пусть движение f отображает точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, в точки A' , B' и C' (черт. 46):

$$f(A, B, C) = A', B', C'.$$

Покажем, что не существует другого движения, отображающего точки A , B и C в точки A' , B' и C' .



Черт. 46

Точки A и B и точки A' и B' определяют лучи AB и $A'B'$ с началами в A и A' . Точки C и C' определяют полуплоскости λ и λ' , ограниченные прямыми AB и $A'B'$. При движении f луч AB отображается в луч $A'B'$, а полуплоскость λ в полуплоскость λ' . По свойству 6 (§ 7) такое движение является единственным, что и требовалось установить.

Отсюда мы делаем важный вывод: движение фигуры полностью опре-

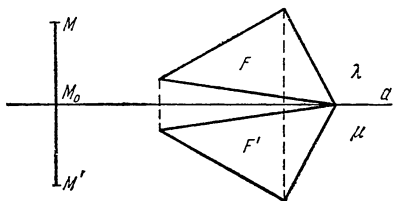
деляется перемещением трех ее точек, не лежащих на одной прямой.

В следующих параграфах рассматриваются движения на плоскости, т. е. такие движения, при которых некоторая плоскость отображается сама в себя.

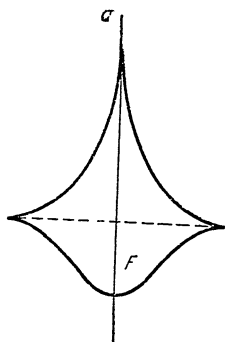
§ 20. Отражение от прямой

В § 9 мы установили, что существует движение, при котором прямая a , лежащая в плоскости α , отображается

сама в себя, все точки этой прямой также отображаются сами в себя, а полуплоскости, ограниченные этой прямой, отображаются одна в другую (λ в μ , а μ в λ). Точка M одной полуплоскости отображается в точку M' другой полуплоскости. Было установлено, что отрезок MM' перпендикулярен прямой a и делится ею в точке M_0 пополам. Отсюда следует, что точка M' отображится в точку M . Итак, точки M и M' отображаются друг в друга взаимно (черт. 47).



Черт. 47



Черт. 48

Данное движение называется *отражением от прямой a* . Сама прямая a называется *осью отражения*. Будем обозначать такое движение через S_a . Имеем $S_a(M) = M'$ и $S_a(M') = M$.

Если f^{-1} — движение, обратное отражению S_a , то $S_a f^{-1} = f_0$. С другой стороны, произведение движений $S_a S_a$ отображает каждую точку M самое в себя, т. е. $S_a S_a = f_0$. Отсюда следует, что $f^{-1} = S_a$, т. е. движение, обратное отражению, совпадает с этим отражением:

$$S_a^{-1} = S_a.$$

Фигуры F и F' , отображающиеся друг в друга при отражении от a , называются *симметричными относительно этой прямой*. В частности, точки M и M' симметричны относительно a .

Фигуру, которая при движении отображается сама в себя, будем называть *фигурой инвариантной для этого движения*.

Инвариантными фигурами при отражении являются точки оси отражения и сама ось. Легко видеть, что таковыми являются также прямые, перпендикулярные оси.

Если фигура F инвариантна при отражении от прямой a , то будем говорить также, что она симметрична относительно этой прямой; ось отражения a будем называть осью симметрии фигуры F (черт. 48).

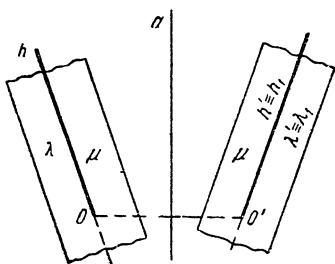
§ 21. Движение произвольного вида на плоскости

Произведение отражений относительно прямых a, b, c и т. д., лежащих в плоскости α , является движением, при котором плоскость α отображается сама в себя, т. е. движением на этой плоскости. Оказывается, что такими произведениями исчерпываются все движения на плоскости. Более того, имеет место следующая теорема.

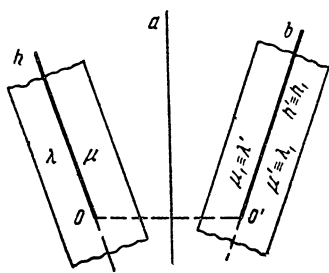
Теорема. *Всякое движение на плоскости можно представить как произведение самое большее трех отражений.*

Пусть f — движение на плоскости α , отличное от тождественного. Рассмотрим луч h , расположенный на этой плоскости и выходящий из точки O . Этот луч принадлежит прямой, ограничивающей две полуплоскости λ и μ . При движении f точка O , луч h и полуплоскости λ и μ отображаются соответственно в точку O' , луч h' , выходящий из O' , и полуплоскости λ' и μ' , ограниченные прямой, которой принадлежит луч h' . Коротко запишем так:

$$f(O, h, \lambda, \mu) = O', h', \lambda', \mu'.$$



Черт. 49 а



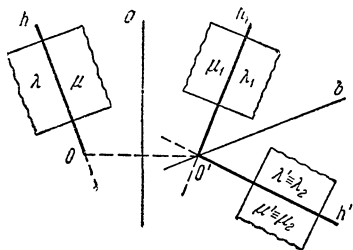
Черт. 49 б

Будем считать, что O' не совпадает с O , что допустимо, так как f не является тождественным движением. Возьмем прямую a плоскости α , перпендикулярную отрезку OO' и делящую его пополам. При отражении от нее точка O отобразится в точку O' , луч h и полуплоскости λ и μ отобразятся соответственно в луч h_1 и полуплоскости λ_1 и μ_1 .

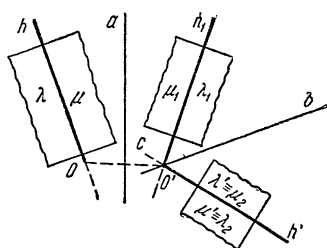
1. Может оказаться, что луч h_1 совпадает с h' , а полуплоскость λ_1 — с полуплоскостью λ' (черт. 49 а). В этом случае в силу свойства 6 (§ 7) движение f совпадает с отражением S_a .

2. Может оказаться, что луч h_1 совпадает с лучом h' , а полуплоскость λ_1 совпадает не с λ' , а с μ' (черт. 49 б). Тогда полуплоскость μ_1 совпадает с λ' . Произведем, теперь второе отражение от прямой b , которой принадлежит луч h' . Тогда луч h' отобразится сам в себя, а полуплоскость λ_1 — в полуплоскость λ' . Имеем $S_b S_a(O, h, \lambda) = O', h', \lambda'$. В силу того же свойства 6 $f = S_b S_a$.

3. Пусть теперь луч h_1 не совпадает с лучом h' (черт. 50 а, б). Проведем через точку O' прямую b , разделяющую $\angle(h', h_1)$ пополам, и произведем второе отражение относительно этой прямой. Тогда точка O' отобразится сама в себя, луч h_1 отобразится, очевидно, в луч h' , полуплоскость λ_1 — в полуплоскость λ_2 , а полуплоскость μ_1 — в μ_2 . Если при этом λ_2 совпадает с λ' (чертеж 50 а), то $S_b S_a(O, h, \lambda) = O', h', \lambda'$. Следовательно, движение f совпадает с произведением $S_b S_a$.



Черт. 50 а



Черт. 50 б

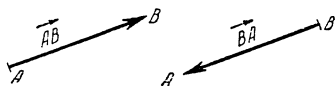
Если же λ_2 совпадает с μ' (черт. 50 б), то произведем еще третье отражение от прямой c , которой принадлежит луч h' . Тогда $S_c(O', h', \lambda_2) = O', h', \lambda'$. Следовательно, в этом случае $f = S_c S_b S_a$, т. е. движение f является произведением уже трех отражений.

Так как рассмотрены все возможные случаи, то теорема этим доказана. Таким образом, чтобы рассмотреть все различные виды движений на плоскости, достаточно рассмотреть, кроме отражения, еще произведения двух и трех отражений. Это и будет сделано в следующих параграфах.

§ 22. Векторы

Множество точек отрезка AB можно упорядочить двумя способами, которые мы сейчас и рассмотрим.

Пусть K , L и M — три различные точки отрезка AB , и пусть на прямой AB установлено направление от A к B . При первом способе будем считать, что точка L следует за точкой K и предшествует точке M , если на направленной прямой эти точки находятся в том же порядке. При этом говорят, что на отрезке AB установлено направление от A к B , совпадающее с направлением прямой. Множество точек

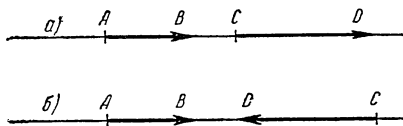


Черт. 51

отрезка стало, как легко видеть, упорядоченным (см. § 3). Точки A и B оказываются при этом соответственно начальной и конечной точками.

При втором способе будем считать, что точка L предшествует точке K и следует за точкой M , если на направленной

прямой точка L следует за точкой K и предшествует точке M (мы получим, очевидно, то же самое, если на прямой установим направление от B к A и упорядочим множество точек отрезка первым способом). В этом случае говорят, что на данном отрезке установлено направление от B к A , противоположное направлению прямой. Теперь точка B будет начальной, а точка A — конечной точкой упорядоченного множества точек отрезка.



Черт. 52 а

Черт. 52 б

Отрезок, на котором установлено направление, называется *ориентированным отрезком* или *вектором*. Начальная и конечная точки его называются соответственно началом и концом вектора.

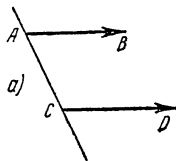
Если на отрезке AB установлено направление от A к B , то полученный вектор обозначается символом \overrightarrow{AB} .

На чертеже конец вектора указывается стрелкой (черт. 51).

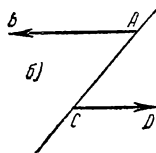
Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} считаются равными по величине, если равны отрезки AB и CD .

Рассмотрим векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , принадлежащие ориентированной прямой a . Если оба они имеют одинаковое направление с прямой или если оба они имеют противоположное направление с этой прямой, то данные векторы считаются одинаково направленными. Если же один из них имеет одинаковое направление с прямой, а другой противоположное, то эти векторы считаются противоположно направленными (черт. 52 а, б).

Векторы AB и CD , принадлежащие разным прямым, считаются *одинаково направленными*, если эти прямые параллельны и концы данных векторов лежат в одной полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через их начала (черт. 53 а). Если же их концы лежат в разных полуплоскостях, ограниченных этой прямой, то данные векторы считаются *противоположно направленными* (черт. 53 б).



Черт. 53 а



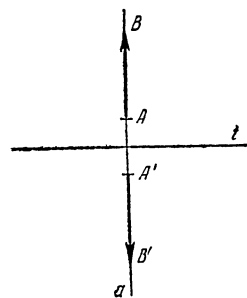
Черт. 53 б

Отметим без доказательства следующие очевидные свойства векторов, принадлежащих одной и той же прямой или параллельным прямым.

1. Если равные по величине векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} одинаково направлены, то векторы \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} тоже равны по величине и одинаково направлены.

2. Два вектора, одинаково направленные с третьим вектором, одинаково направлены между собой.

3. Два вектора, противоположно направленные с третьим вектором, одинаково направлены между собой.



Черт. 54

Ориентированная прямая a , перпендикулярная прямой t , при отражении от последней преобразуется сама в себя, но меняет свое направление, так как принадлежащие ей лучи, полученные при пересечении данных прямых, отображаются взаимно друг в друга. Следовательно, меняет свое направление любой вектор, принадлежащий прямой a (черт. 54).

Итак, вектор, перпендикулярный прямой, при отражении от нее меняет свое направление на противоположное.

Два вектора будем считать равными, если они равны по величине и имеют одинаковое направление. Равенство векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} обозначается при помощи обычного знака равенства:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Если при точечном преобразовании точка M отображается в точку M' , то вектор $\overrightarrow{MM'}$ называется *вектором смещения* точки M при данном преобразовании.

Рассмотрим луч h , выходящий из точки O . Все векторы, принадлежащие лучу h и выходящие из точки O , одинаково направлены между собой. Будем говорить, что каждый из них определяет направление данного луча.

Пусть направления лучей h и h' определены векторами \overrightarrow{OA} и $\overrightarrow{O'A'}$. Лучи h и h' мы назовем *одинаково направленными*, если векторы \overrightarrow{OA} и $\overrightarrow{O'A'}$ имеют одинаковое направление; если же эти векторы имеют противоположное направление, то данные лучи назовем *противоположно направленными*.

§ 23. Переносы на плоскости

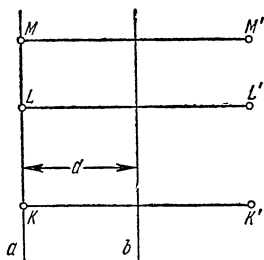
Рассмотрим движение на плоскости, которое можно представить как произведение двух отражений относительно параллельных прямых. Такое движение называется *параллельным перенесением* или *переносом на плоскости*. Это название связано со следующим характерным свойством рассматриваемого движения.

Т е о р е м а. *При переносе на плоскости векторы смещения всех точек этой плоскости равны между собой.*

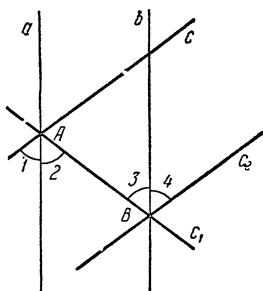
Пусть перенос f можно представить как произведение отражения от прямой b (второе отражение) на отражение от параллельной ей прямой a (первое отражение): $f = S_b S_a$.

При первом отражении точки K, L, M и т. д. прямой a (черт. 55) отображаются сами в себя, а при отражении от прямой b они отобразятся в точки K', L', M' и т. д. Величина каждого из векторов $\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{LL'}, \overrightarrow{KK'}, \dots$ равна удвоен-

ной ширине полосы, ограниченной прямыми a и b , все они перпендикулярны этим осям и располагаются по ту же сторону от a , что и прямая b . Будем говорить, что они направлены от прямой a к прямой b . Следовательно, векторы смещения всех точек прямой a при переносе f равны между собой.



Черт. 55



Черт. 56

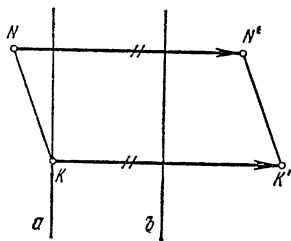
Рассмотрим прямую c , пересекающую прямые a и b , но не перпендикулярную им (черт. 56). Пусть при отражении от прямой a прямая c отображается в прямую c_1 , а при отражении от прямой b прямая c_1 отображается в прямую c_2 : $S_a(c) = c_1$; $S_b(c_1) = c_2$. Итак, при переносе f прямая c отображается в прямую c_2 . Прямые c и c_1 образуют с прямой a равные углы 1 и 2, а прямые c_1 и c_2 образуют с прямой b равные углы 3 и 4.

Так как $a \parallel b$, то $\angle 2 = \angle 3$. Поэтому $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$. Отсюда следует, что прямые c и c_2 при пересечении с прямой c_1 образуют равные внутренние накрест лежащие углы, т. е. $c \parallel c_2$.

Если $c \parallel a$, то $c_1 \parallel a$, $c_1 \parallel b$ и $c_2 \parallel b$. Значит, и в этом случае $c \parallel c_2$.

Итак, прямая c , не перпендикулярная прямым a и b , отображается в параллельную ей прямую c_2 .

Что касается прямых, перпендикулярных прямым a и b , то они, очевидно, отображаются сами в себя.



Черт. 57

Пусть N — произвольная точка плоскости, не лежащая на оси a (черт. 57). Она при переносе f отобразится в точку

N' . Вектор ее смещения $\overrightarrow{NN'}$. Возьмем точку K на оси a так, чтобы прямая NK не была перпендикулярна прямым a и b . При переносе точка K отобразится в точку K' , а отрезок NK в параллельный и равный ему отрезок $N'K'$. Следовательно, фигура $NN'KK'$ является параллелограммом.

Поэтому векторы $\overrightarrow{NN'}$ и $\overrightarrow{KK'}$ равны между собой.

Вектор смещения любой точки плоскости равен вектору смещения точки K оси a . Этим теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если перенос представлен как произведение отражений от параллельных прямых, то вектор смещения какой-либо точки равен по величине удвоенной ширине полосы, ограниченной этими прямыми, перпендикулярен им и направлен от первой оси отражения ко второй.

Вектор смещения любой точки при переносе назовем вектором переноса. Из доказанной теоремы следует, что перенос полностью определяется вектором переноса.

Пусть задан вектор переноса. Чтобы представить перенос как произведение двух отражений, надо ось первого отражения a взять произвольно, но перпендикулярно вектору переноса, а ось второго отражения b взять параллельно оси a так, чтобы ширина ограниченной этими прямыми полосы была равна половине вектора переноса, и так, чтобы направление вектора переноса совпадало с направлением от оси a к оси b .

Если $f = S_b S_a$, то движение $f^{-1} = S_a S_b$ будет обратным ему. Действительно, используя свойство сочетательности, получим:

$$f^{-1} f = (S_a S_b) (S_b S_a) = S_a (S_b S_b) S_a = S_a f_0 S_a = S_a S_a = f_0,$$

где f_0 — тождественное движение.

Движение, обратное переносу, есть перенос, вектор которого равен по величине вектору данного переноса и имеет с ним противоположное направление.

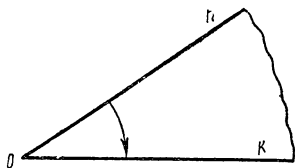
Тождественное движение мы будем рассматривать как перенос, вектор которого равен нулю.

При переносе, отличном от тождественного движения, не существует точек, отображающихся сами в себя. Прямые, параллельные вектору переноса, очевидно, преобразуются сами в себя (инвариантные фигуры при переносе).

§ 24. Ориентированные углы

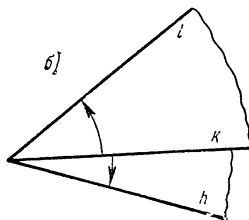
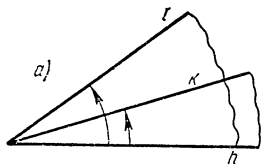
Угол, у которого одна сторона считается начальной, а другая конечной, называется *направленным* или *ориентированным углом*.

Ориентированный угол с начальной стороной h и конечной k будем обозначать так: $\angle (h, \overrightarrow{k})$. Итак, будем говорить о направлении угла от стороны h к стороне k . На чертеже направление угла обозначается дуговой стрелкой, расположенной во внутренней области угла; конец стрелки указывает на конечную сторону угла (черт. 58).

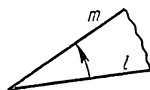
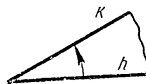
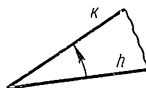


Черт. 58

Каждый угол можно ориентировать двумя способами в зависимости от выбора начальной стороны его. Исходя из наглядных представлений, мы говорим об ориентации этого угла в направлении вращения часовой стрелки или об ориентации его в противоположном направлении. Мы говорили также об одинаковом или противоположном направлении двух ориентированных углов, применяя к каждому из них критерий «вращения часовой стрелки». Свойствами ориентированных углов пользуются в геометрии и ее приложениях. Таким образом, в элементарном курсе геометрии, оперируя с направленными углами, мы пользуемся рядом предложений, принимаемых без доказательства и поданных нам опытом, т. е. пользуемся аксиомами. Мы принимаем без доказательства возможность разбиения мно-



Черт. 59

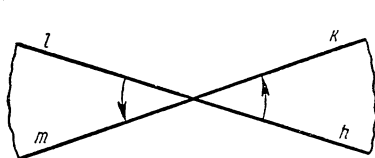


Черт. 60

жества ориентированных углов плоскости на два класса, обладающих следующими свойствами:

1. Углы: $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ и $\angle(\vec{k}, \vec{h})$, с общей внутренней областью принадлежат разным классам.

2. Углы: $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ и $\angle(\vec{h}, \vec{l})$, с общей начальной стороной принадлежат одному классу, если один из них полностью принадлежит другому (т. е. представляет его часть), и разным классам в противном случае (черт. 59).



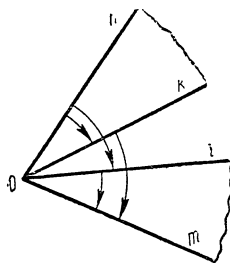
Черт. 61

3. Два угла: $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ и $\angle(\vec{l}, \vec{m})$, каждый из которых меньше развернутого, принадлежат одному классу, если их начальные и конечные стороны направлены попарно одинаково

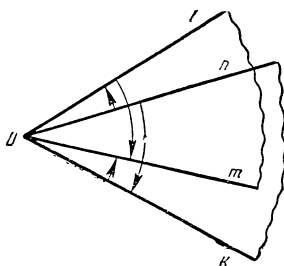
(§ 22) или попарно противоположно (черт. 60).

Следствие. Вертикальные углы: $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ и $\angle(\vec{l}, \vec{m})$, принадлежат одному классу, если их начальные стороны (а значит и конечные) принадлежат одной прямой (черт. 61).

4. Если равные углы: $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ и $\angle(\vec{l}, \vec{m})$, с общей вершиной O не являются вертикальными и принадлежат одному классу, то углы: $\angle(\vec{h}, \vec{l})$ и $\angle(\vec{k}, \vec{m})$, каждый из которых меньше развернутого, также равны и принадлежат одному классу (черт. 62 а, 62 б).



Черт. 62 а



Черт. 62 б

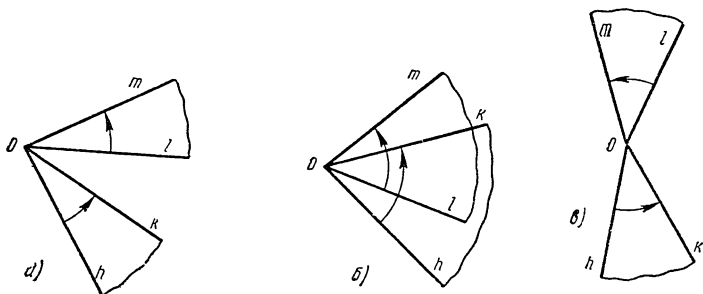
5. Движение на плоскости всякие два угла, принадлежащие одному классу, отображает в углы, принадлежащие также одному классу.

Углы одного класса мы назовем углами, ориентированными в направлении вращения часовой стрелки, а углы другого класса — углами, ориентированными противоположно вращению часовой стрелки.

Перечисленные свойства позволяют установить, принадлежат ли какие-либо два ориентированных угла одному классу, или эти углы принадлежат разным классам. Покажем, как это можно сделать.

Пусть даны равные острые углы $\angle(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{k})$ и $\angle(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m})$ с общей вершиной O . Если они вертикальные, то поставленная задача решается с помощью следствия из свойства 3. Если же они имеют общую внутреннюю область, то вопрос решается на основании свойства 1. Будем считать поэтому, что они не являются вертикальными и внутренние области их разные.

Рассмотрим две пары углов, каждый из которых меньше развернутого: пару углов $\angle(h, l)$, $\angle(k, m)$ и пару углов $\angle(h, m)$, $\angle(k, l)$. Легко видеть для каждого из возможных случаев расположения данных углов, показанных на чертежах 63, а, б, в, что из этих двух пар углов всегда можно выбрать пару неравных между собой. При принятых для

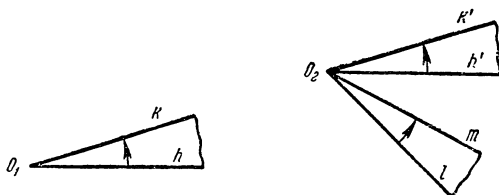


Черт. 63

данных чертежей обозначениях $\angle(h, m) \neq \angle(k, l)$. По свойству 4 заключаем, что $\angle(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{k})$ и $\angle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{l})$ принадлежат разным классам (т. к. при принадлежности их к одному классу $\angle(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{m}) = \angle(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{l})$). Следовательно, углы $\angle(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{k})$ и $\angle(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m})$ принадлежат одному классу.

Пусть теперь равные острые углы: $\angle(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{k})$ и $\angle(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m})$, имеют разные вершины O_1 и O_2 (черт. 64). Построим третий

угол — $\angle(h', \overrightarrow{k'})$ так, чтобы точка O_2 была его вершиной, а его стороны были параллельны соответствующим сторонам угла $\angle(h, \overrightarrow{k})$ и одинаково направлены с ними. Тогда по свойству 3 углы: $\angle(h, \overrightarrow{k})$ и $\angle(h', \overrightarrow{k'})$, принадлежат одному классу. Нам осталось решить поставленную задачу для равных углов — $\angle(h', \overrightarrow{k'})$ и $\angle(l, \overrightarrow{m})$, что мы умеем уже сделать. Если они принадлежат одному классу, то одному классу принадлежат также данные углы. В противном случае данные углы принадлежат разным классам.



Черт. 64

Возьмем теперь два произвольных угла — $\angle(h, \overrightarrow{k})$ и $\angle(l, \overrightarrow{m})$. Построим равные острые углы — $\angle(h, \overrightarrow{k'})$ и $\angle(l, \overrightarrow{m'})$, представляющие части углов — $\angle(h, \overrightarrow{k})$ и $\angle(l, \overrightarrow{m})$ — соответственно.

По свойству 2 углы: $\angle(h, \overrightarrow{k'})$ и $\angle(h, \overrightarrow{k})$, принадлежат одному классу, то же относится к углам $\angle(l, \overrightarrow{m'})$ и $\angle(l, \overrightarrow{m})$. Решив вопрос о принадлежности углов: $\angle(h, \overrightarrow{k'})$ и $\angle(l, \overrightarrow{m'})$, к одному классу, мы, следовательно, решим поставленную задачу для данных углов.

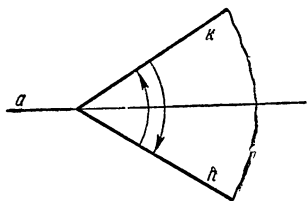
Рассмотрим теперь, что происходит с ориентацией углов при движении.

Т е о р е м а. При отражении от прямой ориентация любого угла меняется на противоположную.

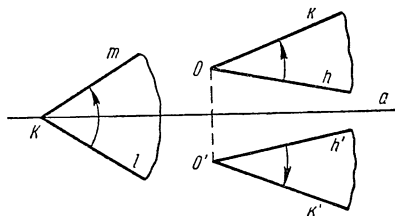
Пусть при отражении от прямой a $\angle(h, \overrightarrow{k})$ отобразился в $\angle(h', \overrightarrow{k'})$. Нам надо доказать, что эти углы принадлежат разным классам.

а) Ч а с т н ы й с л у ч а й. a — ось симметрии $\angle(h, k)$ (черт. 65). При отражении от прямой $\angle(\overrightarrow{h}, k)$ отобразится в $\angle(k, \overrightarrow{h})$ с той же внутренней областью. По свойству 1 ориентация угла изменилась.

б) О б щ и й с л у ч а й. Возьмем произвольную точку K на прямой a и построим $\angle(l, m)$ с вершиной в этой точке так, чтобы он был симметричен относительно данной прямой



Черт. 65



Черт. 66

(черт. 66). Легко видеть, что такой угол всегда существует. Ориентацию этого вспомогательного угла возьмем так, чтобы она совпадала с ориентацией данного угла $\angle(\overrightarrow{h}, k)$. Пусть это будет $\angle(\overrightarrow{l}, m)$. При отражении $\angle(\overrightarrow{l}, m)$ меняет свою ориентацию и отображается в $\angle(\overrightarrow{m}, l)$, который по свойству 5 будет иметь одинаковое направление с $\angle(\overrightarrow{h'}, k')$. Следовательно, углы: $\angle(\overrightarrow{h}, k)$ и $\angle(\overrightarrow{l}, m)$, принадлежат разным классам.

С л е д с т в и е. Если движение может быть представлено как произведение четного числа отражений, то ориентация углов при этом движении не меняется (например, при переносе); если же движение может быть представлено как произведение нечетного числа отражений, то ориентация углов меняется на противоположную.

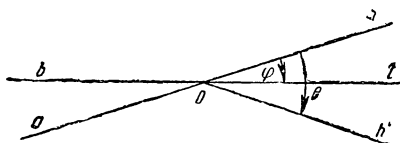
§ 25. Повороты на плоскости

Рассмотрим теперь движение, которое можно представить как произведение двух отражений относительно пересекающихся прямых. Это движение назовем *поворотом*.

Пусть поворот f является произведением отражений от прямой b (второе отражение) на отражение от прямой a (первое отражение):

$$f = S_b S_a.$$

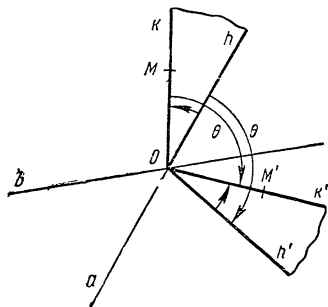
Рассмотрим точку пересечения осей (черт. 67). Так как $S_a(O) = O$ и $S_b(O) = O$, то $f(O) = O$, т. е. при повороте точка O отображается сама в себя (неподвижная точка). Пусть h и l — лучи прямых a и b , выходящие из точки O .



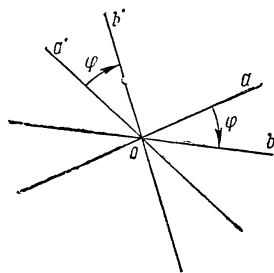
Черт. 67

При отражении S_a луч h отображается сам в себя, а при отражении S_b он отображается в некоторый луч h' , выходящий из точки O . Будем считать, что $\angle(h, l)$ не превышает прямого угла. Ориентированный $\angle(h, h')$, который берем таким, чтобы он не превышал развернутый угол, будет равен по величине удвоенному $\angle(h, l)$. Так как $\angle(h, l)$ составит при этом часть $\angle(h, h')$, то $\angle(h, l)$ и $\angle(h, h')$ одинаково ориентированы.

Точку O назовем центром поворота, а ориентированный угол $\vec{\Theta} = \angle(h, h')$ — углом поворота.



Черт. 68



Черт. 69

Возьмем теперь произвольную точку M плоскости и проведем через нее луч OM , который обозначим через k (черт. 68). После отражения от прямых a и $b \angle (h, \vec{k})$ преобразуется в равный ему $\angle (h', \vec{k}')$. Так как при каждом отражении ориентация угла меняется на противоположную, то углы: $\angle (h, \vec{k})$ и $\angle (h', \vec{k}')$, будут одинаково ориентированными. Отсюда следует (§ 24), что $\angle (h, \vec{h}')$ и $\angle (k, \vec{k}')$ равны и одинаково ориентированы. Кроме того, $OM' = OM$.

Чтобы получить точку M' , соответствующую точке M при повороте с центром O и углом поворота $\vec{\Theta}$, надо провести через M луч k , выходящий из центра поворота, построить $\angle (k, \vec{k}')$, равный углу $\vec{\Theta}$ и одинаково с ним ориентированный, и на луче k' взять точку M' так, чтобы $OM' = OM$.

Таким образом, каждая точка плоскости поворачивается вокруг O на один и тот же угол $\vec{\Theta}$. Следовательно, поворот полностью определен центром O и углом поворота $\vec{\Theta}$.

Тождественное движение можно рассматривать как поворот, угол которого равен нулю.

Из сказанного следует, что поворот, заданный центром O и углом $\vec{\Theta}$, можно представить как произведение двух отражений относительно осей a и b , проходящих через центр поворота. Ось a при этом мы можем взять произвольно, ось b должна составить с осью a угол φ , равный половине угла поворота и одинаково с ним ориентированный, считая при этом направление вращения угла φ от оси первого отражения (ось a) к оси второго отражения (ось b).

Если поворот f является произведением отражения S_b на отражение S_a , то этот же поворот можно задать как произведение отражений относительно осей a' и b' (черт. 69), проходящих через центр поворота O и образующих между собой угол, равный углу между осями a и b и одинаково с ним ориентированный (направление ориентаций считается в обоих случаях от оси первого отражения к оси второго отражения). Можно записать, что

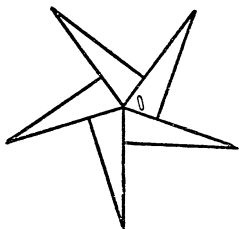
$$f = S_b S_a = S_{b'} S_{a'}.$$

При повороте на любой угол окружности с центром в точ-

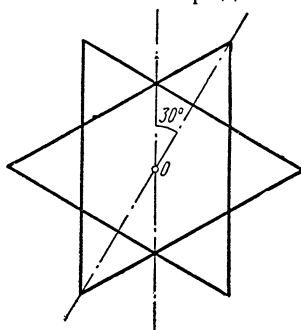
ке O будут отображаться сами на себя (инвариантные фигуры при повороте).

Если при повороте фигура F отображается сама на себя, то будем говорить, что эта фигура имеет симметрию относительно данного поворота.

Фигура F имеет симметрию вращения порядка n относительно центра O , если при повороте вокруг него на угол $\Theta = \frac{360^\circ}{n}$ эта фигура отображается сама на себя. Точка O называется центром симметрии n -го порядка фигуры F . На чертежах 70 и 71 приведены примеры симметрии вращения пятого и шестого порядков.



Черт. 70



Черт. 71

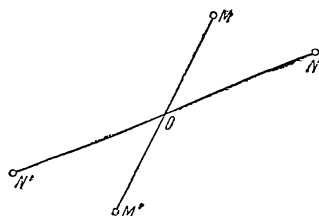
Установим теперь связь между осевой симметрией (§ 20) и симметрией вращения.

Если фигура F имеет две оси симметрии a и b , пересекающиеся под углом $\varphi = \frac{180^\circ}{n}$, то при повороте $f = S_b S_a$

(угол поворота $\Theta = 2\varphi = \frac{360^\circ}{n}$) эта фигура отображается

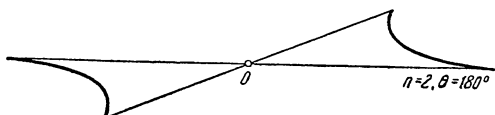
сама на себя. Следовательно, точка пересечения этих осей является центром симметрии n -го порядка. Например, правильный шестиугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом 30° , и симметрию вращения шестого порядка.

Если угол поворота равен развернутому углу, то этот поворот называется отражением



Черт. 72

от центра O . Точка M отображается в точку M' так, что центр O является серединой отрезка MM' (черт. 72). Точки M и M' называются симметричными относительно центра O . Очевидно, что движение, обратное отражению от точки, совпадает с этим отражением.



Черт. 73

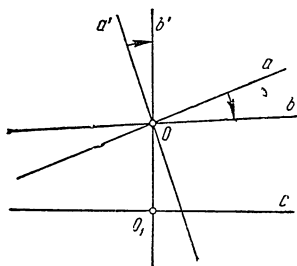
Симметрию вращения второго порядка обычно называют центральной симметрией (черт. 73).

§ 26. Скользящее отражение

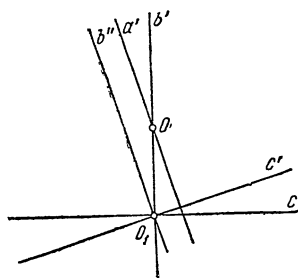
Нам осталось рассмотреть движения на плоскости, отличные от отражения, переноса и поворота. По доказанной в § 21 теореме каждое такое движение можно представить как произведение трех отражений.

Пусть движение f представлено как произведение трех отражений:

$$f = S_c S_b S_a.$$



Черт. 74 а



Черт. 74 б

Рассмотрим сначала тот случай, когда оси a , b и c не параллельны все между собой и не пересекаются в одной точке.

Пусть оси a и b пересекаются в точке O , через которую ось c не проходит (черт. 74 а). Пользуясь сочетательным

законом для умножения движений, мы можем записать:

$$f = S_c (S_b S_a).$$

Но $S_b S_a$ есть поворот с центром O . Этот поворот представим как произведение отражений от осей a' и b' , проходящих через ту же точку O и пересекающихся под тем же углом, под которым пересекаются оси a и b . При этом ось b' возьмем перпендикулярной оси c . Итак,

$$f = S_c (S_b S_a) = S_c (S_{b'} S_{a'}).$$

Пользуясь сочетательным свойством умножения, движение f можно представить так:

$$f = (S_c S_{b'}) S_{a'}.$$

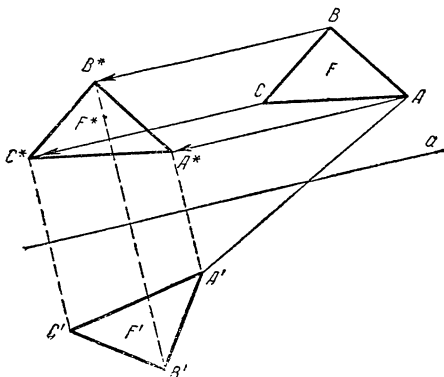
Произведение $S_c \cdot S_{b'}$ есть поворот вокруг точки пересечения осей c и b' (точка O_1). Этот поворот представим как произведение отражений от осей b'' и c' , проходящих через ту же точку O_1 и пересекающихся также под прямым углом (черт. 74 б). При этом ось b'' возьмем параллельной оси a' . Тогда имеем:

$$S_c S_{b'} = S_{c'} S_{b''} \text{ и } f = (S_{c'} S_{b''}) S_{a'}.$$

Снова пользуясь сочетательным законом, окончательно получим:

$$f = S_{c'} (S_{b''} S_{a'}).$$

Произведение $S_{b''} S_{a'}$, где $b'' \parallel a'$, есть перенос, вектор которого перпендикулярен осям a' и b'' и, следовательно, параллелен оси c' .



Черт 75

Рассматриваемое движение f может быть представлено, следовательно, как перенос с последующим отражением от оси, параллельной вектору переноса. Такое движение называется *скользящим отражением*.

На чертеже 75 показано скользящее отражение: фигура F сначала подвергнута переносу с вектором $\overrightarrow{AA^*}$, а потом отражению от оси a , параллельной $\overrightarrow{AA^*}$.

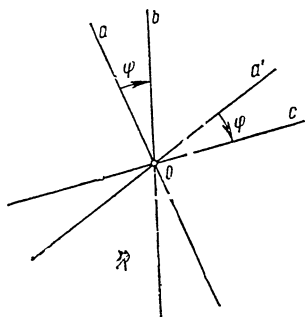
Так как скользящее отражение является произведением трех отражений, то ориентация углов при нем меняется на противоположную. Очевидно, что при скользящем отражении нет неподвижных точек, а ось a отображается сама в себя.

Докажем, что ось скользящего отражения a делит отрезок, соединяющий соответственные точки фигур F и F' , пополам.

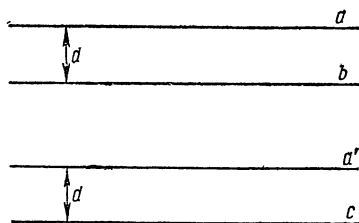
Для этого рассмотрим $\triangle AA^*A'$. Прямая a параллельна стороне AA^* этого треугольника и делит отрезок $A'A^*$ пополам. Следовательно, отрезок AA' разделится также пополам.

Отмеченным свойством оси скользящего отражения можно воспользоваться для ее нахождения, если это движение задано тремя парами соответственных точек фигур F и F' .

Рассмотрим теперь случай, когда оси a , b и c пересека-



Черт. 76



Черт. 77

ются в одной точке (точка O). Движение $f = S_c S_b S_a$ по свойству сочетательности можно представить так: $f = S_c (S_b S_a)$. Поворот $S_b S_a$ можно представить как произведение $S_c S_{a'}$, где ось a' проходит через ту же точку O и составляет с осью

c угол, равный углу между осями a и b и направленный от a' к c (черт. 76). Тогда

$$f = S_c (S_c S_{a'}).$$

Применим опять свойство сочетательности:

$$f = (S_c S_c) S_{a'}.$$

Так как $S_c S_c = f_0$ — тождественное движение, то $f = S_{a'}$, т. е. движение f , является отражением от оси a' .

Если теперь оси a , b и c параллельны (черт. 77), то $f = S_c S_b S_a = S_c (S_b S_a)$. Вместо осей a и b возьмем оси a' и c так, чтобы $S_b S_a = S_c S_{a'}$ (перенос $S_b S_a$ мы выразили как произведение отражений от осей a' и c). Получим:

$$f = S_c (S_c S_{a'}) = (S_c S_c) S_{a'} = S_{a'},$$

т.е. движение и в этом случае есть отражение.

§ 27. Классификация движений на плоскости

Всякое движение на плоскости, как мы знаем, можно представить как произведение не более трех отражений. Выше мы рассмотрели все возможные случаи представления движений в виде одного, двух или трех отражений и этим охватили все многообразие движений на плоскости.

Движения, которые можно представить как произведение четного числа отражений, назовем движениями первого рода. К ним относятся следующие движения:

1. Тождественное движение (нуль отражений).
2. Перенос (два отражения).
3. Поворот (два отражения).

При движении первого рода ориентация углов не изменяется.

Движения, которые можно представить как произведение нечетного числа отражений, назовем движениями второго рода. Это следующие движения:

4. Отражение (одно отражение).
5. Скользящее отражение (три отражения).

При движении второго рода ориентации углов изменяется на противоположную.

Произведение двух движений первого рода является движением первого рода, так как при этом ориентация уг-

лов не изменяется. Произведение двух движений второго рода дает тоже движение первого рода по той же причине.

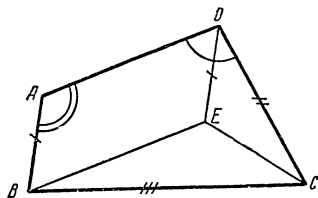
§ 28. Применение движений к геометрическим построениям

При решении задач на построение часто используются перемещения отдельных данных элементов искомой фигуры. Это дает возможность данную задачу свести к более простым задачам на построение. Приведем примеры.

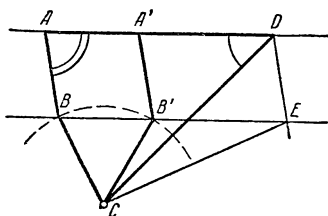
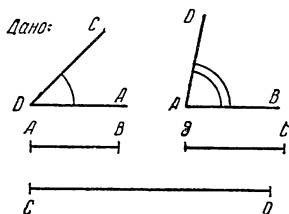
Задача 1. Построить четырехугольник $ABCD$ по трем сторонам и двум углам, прилежащим к четвертой стороне (черт. 78 а).

Анализ. Пусть в искомом четырехугольнике $ABCD$ (черт. 78 б) данными элементами являются стороны AB , BC , CD и углы BAD и ADC .

Сблизим между собой стороны AB и DC путем переноса стороны AB при векторе смещения \overrightarrow{AD} . Отрезок AB отображается в равный и параллельный ему отрезок DE . Рассмотрим $\triangle DEC$. В нем известными элементами оказываются стороны DE и DC и $\angle EDC$, равный разности $\angle ADC$ и угла, смежного с $\angle BAD$. Построив его по этим элементам, мы сможем построить $\triangle BEC$ по сторонам EC , BC и $\angle BEC$, который определяется через $\angle DEC$ и данный $\angle BAD$.



Черт. 78 б



Черт. 78 а

После этого остается построить параллелограмм $ABED$.

Построение. (черт. 78 а). На произвольной прямой LK берем произвольную же точку D и строим углы KDE и LDC , равные соответственно данным углам BAD и ADC . На лу-

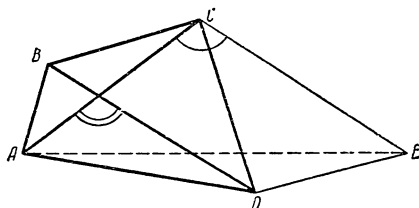
ках DE и DC откладываем отрезок $DE = AB$ и отрезок DC . Строим затем прямую $EM \parallel KL$, окружность C (CB) и точки их пересечения с прямой EM (если они существуют) B и B' . Наконец, подвергаем отрезок DE переносу с вектором \vec{EB} (или $\vec{EB'}$) в положение AB (или $A'B'$).

При принятых в нашей задаче данных построение дало нам выпуклый четырехугольник $ABCD$ и невыпуклый четырехугольник $A'B'CD$. Эти четырехугольники будут искомыми, что предоставляем проверить читателю. При других данных решений может не быть вообще (в случае отсутствия общих точек у прямой EM и окружности C) или может быть только одно решение (например, при $BC > EC$).

Если в четырехугольнике данными элементами являются диагонали, то может оказаться выгодным подвергнуть переносу одну из них так, чтобы конец ее отобразился в конец другой диагонали.

Задача 2. Построить четырехугольник по двум противолежащим сторонам, двум диагоналям и углу между ними.

Анализ. Пусть в искомом четырехугольнике $ABCD$ (черт. 79) данными элементами являются стороны BC и AD ,



Черт 79

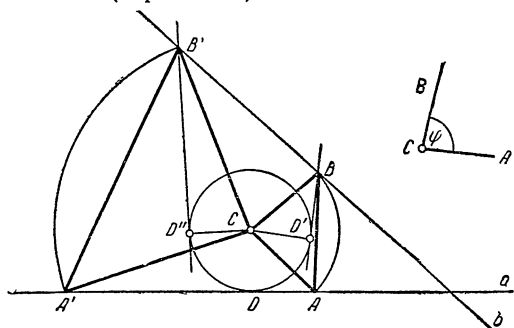
диагонали AC и BD и $\angle AOD$, образованный ими. Подвергнем диагональ BD переносу с вектором \vec{BC} . Она отобразится в отрезок CE . В $\triangle ACE$ сторона AC дана, $CE = BD$ и $\angle ACE = \angle AOD$. Построив его, мы, далее, сможем построить $\triangle AED$ по трем сторонам (AD — данная сторона, $DE = BC$). После этого остается подвергнуть отрезок CE переносу с вектором \vec{ED} .

При построении следует учесть, что точки D и C могут быть расположены по разные стороны прямой AE и по одну сторону ее.

Если отрезок AE окажется меньше суммы отрезков BC и AD , то $\triangle AED$ не существует и поэтому не существует и искомый четырехугольник.

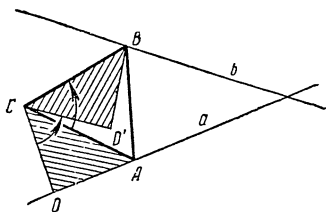
При решении следующей задачи применяется поворот на плоскости части фигуры.

Задача 3. Построить равнобедренный треугольник ABC , у которого $AC = BC$, $\angle ACB$ — данный, положение вершины C задано, а вершины A и B лежат соответственно на прямых a и b (черт. 80 а).



Черт. 80 а

Анализ. Пусть $\triangle CAB$ — искомый (черт. 80 б). Опустим из точки C перпендикуляр CD на прямую a (D — основание перпендикуляра). Так как $AC = CB$, то при повороте $\triangle CDA$ вокруг центра C на $\angle ACB$ его вершина A совпадет с вершиной B искомого треугольника, точка D при этом займет положение D' . В $\triangle BCD'$ положение стороны CD' определено, а вершина B лежит на данной прямой b и на прямой BD' , перпендикулярной этой стороне. Отсюда вытекает следующее построение.



Черт. 80 б

Построение (черт. 80 а). Строим прямую CD , перпендикулярно данной прямой a , и точку D , в которой эти прямые пересекаются. Строим затем отрезок CD' , рав-

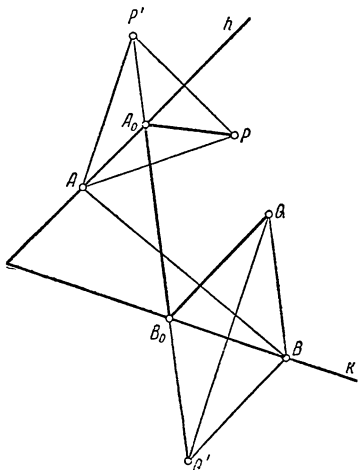
Покажем, наконец, применение отражения от прямой к решению задач на построение.

Задача 4. Дан $\angle (h, k)$ и внутри него точки P и Q . Найти на стороне угла h точку A_0 , а на стороне h точку B_0 так, чтобы периметр ломаной PA_0B_0Q был наименьшим.

Пусть A и B — произвольные точки на соответствующих сторонах угла (черт. 81). Отразим точку P от прямой, которой принадлежит луч h , а точку Q от прямой, которой принадлежит луч k . Пусть P' и Q' — точки, симметричные точкам P и Q . Так как $P'A = PA$ и $Q'B = QB$, то периметры ломаных $PABQ$ и $P'ABQ'$ равны.

Точки A_0 и B_0 , в которых отрезок $P'Q'$ пересекает стороны угла h и k , будут искомыми, так как периметр ломаной PA_0B_0Q будет равен отрезку $P'Q'$.

Если отрезок $P'Q'$ не пересекает угол, то точки A_0 и B_0 мы должны считать слившимися в вершине угла O , так как периметр ломаной $P'OQ'$ будет меньше периметра любой ломаной $P'ABQ'$ (по теореме о периметрах ломаных с общими концами).



Черт. 81

ГЛАВА IV

ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

§ 29. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки

Если отрезок F представляет сумму n отрезков, каждый из которых равен отрезку E , то этот факт мы запишем при помощи равенства:

$$F = nE.$$

Этим равенством мы определяем умножение отрезка на натуральное число. Будем говорить, что отрезок E укладывается в отрезке F точно n раз.

Определим, далее, умножение отрезка на положительную дробь $\frac{m}{n}$ следующим образом: под произведением $\frac{m}{n} E$ будем понимать сумму m отрезков, каждый из которых представляет $\frac{1}{n}$ часть отрезка E .

Легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$m (nE) = (mn) E \quad (1)$$

(m раз взятый отрезок nE представляет отрезок, который мы получим, если возьмем отрезок E mn раз),

$$k \left(\frac{m}{n} E \right) = \frac{km}{n} E \quad (2)$$

$\left(\frac{m}{n} E \right.$ есть m раз взятый отрезок $\frac{1}{n} E$; $k \left[m \left(\frac{1}{n} E \right) \right]$ по предыдущему есть $km \left(\frac{1}{n} E \right)$, т. е. $\frac{km}{n} E$),

$$\frac{1}{n} (mE) = \frac{m}{n} E. \quad (3)$$

Два отрезка P и Q называются соизмеримыми, если существует такой третий отрезок E , который укладывается точно целое число раз в каждом из данных отрезков.

Мы утверждаем, следовательно, что существуют такие натуральные числа m и n , для которых

$$\frac{1}{m} P = \frac{1}{n} Q = E.$$

Отрезок E называется общей мерой отрезков P и Q .

Если отрезки не имеют общей меры, то они называются несоизмеримыми.

Покажем на примере существование несоизмеримых отрезков.

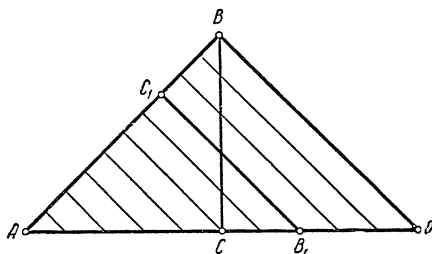
Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC . Докажем, что его гипотенуза AB и катет AC несоизмеримы¹⁾.

¹⁾ Доказательство дано по статье М. С. Мацкина «Новый вариант доказательства теоремы о существовании несоизмеримых отрезков», «Математика в школе», № 4 за 1956 г.

Предположим, что отрезки AB и AC соизмеримы и общая мера E укладывается в AB m раз, а в AC n раз:

$$AB = mE, \quad AC = nE.$$

Построим $\triangle BCD$, равный $\triangle ABC$ и имеющий с ним общий катет BC (черт. 82). В полученном при этом треугольнике ABD будем иметь: $\angle ABD$ — прямой, $AB = BD$ и $AD = 2 AC$. Значит, $AD = 2 nE$. На стороне AB возьмем точку C_1 так, что $AC_1 = AC$, а на стороне AD — точку B_1 , причем $AB_1 = AB$. Тогда $\triangle AC_1B_1 = \triangle ABC$. Разделим, далее, AB на m равных частей. Каждая из них по предпо-



Черт. 82

ложению равна отрезку E . Отрезок AC_1 разделится при этом на n равных частей ($AC_1 = AC = nE$). Через точки деления проведем прямые, параллельные BD ; одной из них будет прямая C_1B_1 . Тогда отрезок AD этими прямыми разделится на m равных частей, а отрезок AB_1 на n таких же частей. Обозначая эту часть через E' , получим:

$$AB_1 = nE', \quad AD = mE'.$$

Значит,

$$AB = mE = nE' \quad \text{и} \quad AD = 2 nE = mE'.$$

Так как

$$mAB = m^2E = mnE'$$

и

$$nAD = 2 n^2 E = nmE',$$

то

$$mAB = nAD,$$

т. е.

$$m^2E = 2 n^2E.$$

Отсюда получаем:

$$m^2 = 2 n^2, \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Так как $n < m < 2n$, то $\frac{m}{n}$ является рациональным числом, отличным от целого. Как известно, квадрат такого числа не может быть равен двум. Следовательно, последнее равенство невозможно. Поэтому предположение о том, что отрезки AB и AC соизмеримы, мы должны отвергнуть. Значит, эти отрезки несоизмеримы.

§ 30. Арифметизированный луч

Для измерения отрезков мы пользуемся линейкой, на которой нанесены деления в определенном масштабе. При этом каждому делению (метке) поставлено в соответствие число. Измеряемый отрезок мы совмещаем с краем линейки так, чтобы один конец его совпал с нулевым делением (меткой). Тогда число, соответствующее метке линейки, к которой ближе всего другой конец этого отрезка, даст нам приближенную длину его с определенной точностью. Таков реальный процесс измерения отрезков. Путем абстракции от него мы получим идеальный процесс, дающий нам точную длину отрезка. Ниже опишем его.

Для измерения отрезков нам потребуется следующая аксиома, известная под названием **а к с и о м ы А р х и м е д а**.

А к с и о м а. Каковы бы ни были два отрезка, всегда найдется такое кратное меньшему отрезку, которое превосходит больший отрезок.

Следовательно, если $AB > CD$, то найдется такое натуральное число m , что $AB < mCD$.

Из этой аксиомы следует также, что каков бы ни был отрезок CD , меньший отрезка AB , всегда найдется такое натуральное число m , что $CD > \frac{1}{m} AB$.

Пусть P и Q — произвольные отрезки. Рассмотрим последовательность отрезков:

$$Q, 2Q, \dots, nQ, (n+1)Q, \dots$$

По аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число m , для которого $mQ > P$. Однако отрезок mQ может не быть первым отрезком последовательности, который превосходит

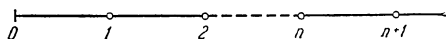
отрезок P . Пусть таким первым отрезком в данной последовательности будет отрезок $(n + 1) Q$. Тогда отрезок nQ уже не превосходит отрезка P ($nQ \leq P$). Если, в частности, $Q > P$, то мы принимаем, что $n = 0$.

Итак, мы пришли к следующему выводу: *каковы бы ни были два отрезка P и Q , всегда найдется неотрицательное число n , для которого*

$$nQ \leq P < (n + 1) Q.$$

Пусть нам дан луч h с началом O . Установим между множеством точек его и множеством неотрицательных действительных чисел соответствие. Число, соответствующее точке, назовем ее координатой. Соответствие установим следующим образом.

Началу луча O поставим в соответствие число нуль. Возьмем некоторый отрезок E (единичный отрезок). Откладываем E последовательно от точки O . Концу первого отрезка поставим в соответствие число 1, второго—2,



Черт. 83

n -го — число n (черт. 83). Каждый отрезок $[n; n + 1]$ разделим на 10 частей и точкам деления поставим в соответствие числа $n, 1; n, 2; n, 3; \dots; n, 9$, идя последовательно от точки с координатой n к точке с координатой $n + 1$. Затем каждый из отрезков $[n, p; n, (p + 1)]$ разделим еще на 10 частей и точкам деления поставим в соответствие числа $n, p_1; n, p_2; n, p_3; \dots; n, p_9$, идя от точки с координатой n, p к точке с координатой $n, (p + 1)$. (Под числом $n, (p + 1)$ понимаем число $n, p + \frac{1}{10}$, под числом $n, p_1 (p_2 + 1)$ — число $n, p_1 p_2 + \frac{1}{10^2}$ и т. д.) Этот процесс будем продолжать неограниченно. Тогда на луче получим бесконечное множество точек, которым поставлены в соответствие конечные десятичные дроби. Каждую такую точку назовем меткой. Координату метки A обозначим через a .

Обозначим отрезок $\frac{1}{10} E$ через E_1 , отрезок $\frac{1}{10} E_1$ (или

$\frac{1}{100} E$) через E_2 ; отрезок $\frac{1}{10} E_2$ (или $\frac{1}{10^3} E$) через E_3 и т. д.

Вообще обозначим через E_t отрезок, составляющий $\frac{1}{10^t}$ отрезка E . Следовательно, можно записать, что

$$E_t = \frac{1}{10^t} E \text{ и } E = 10^t E_t.$$

Число $a = n, p_1 p_2 \dots p_t$ показывает, что в отрезке от O до метки A содержится n раз отрезок E , кроме того, p_1 раз отрезок E_1 , p_2 раз отрезок E_2 и т. д. и, наконец, p_t раз отрезок E_t . Очевидно, что в рассматриваемом отрезке отрезок E_t будет содержаться $10^t a = n, p_1 p_2 \dots p_t \cdot 10^t$ раз.

Пусть имеем две метки A и B с координатами $a = n, p_1 p_2 \dots p_t$ и $b = m, q_1 q_2 \dots q_s$ ($b > a$). Из способа построения этих меток следует, что большему из чисел a и b соответствует более удаленная от начала точка на луче.

Пусть $t \geq s$. Тогда числа $a \cdot 10^t$ и $b \cdot 10^t$ — натуральные и

$$OA = a \cdot 10^t E_t,$$

$$OB = b \cdot 10^t E_t.$$

Следовательно, отрезок AB будет содержать $(b - a) \cdot 10^t$ раз отрезок E_t :

$$AB = (b - a) 10^t E_t.$$

Отсюда следует, что, если $c = b - a$, то отрезки OC и AB будут равны, так как они содержат одинаковое число раз отрезок E_t .

В дальнейшем нам потребуется следующее предложение:

Л е м м а. Между двумя любыми точками луча M и N находится бесконечное множество меток, полученных указанным выше способом.

Для доказательства достаточно установить, что между любыми двумя точками луча находится по крайней мере одна метка. Если $MN > E$, то это очевидно. Пусть $MN < E$. Тогда из аксиомы Архимеда следует, что найдется такое натуральное число t , при котором $MN > \frac{1}{10^t} E$, т. е. $MN > E_t$.

Но тогда отрезок MN содержит хотя бы одну метку порядка t (конец одного из отрезков E_t), т. е. метку с координатой $n, p_1 p_2 \dots p_t$. Таким же путем убедимся, что между этой меткой и точкой M находится еще по крайней мере одна метка

и т. д. Отсюда следует, что отрезок MN содержит бесконечное множество меток.

Итак, на луче содержится бесконечное множество меток, каждой из которых поставлена в соответствие конечная десятичная дробь. Очевидно, что любая конечная десятичная дробь соответствует определенной метке. Встает вопрос: исчерпываются ли полученными указанным образом метками все точки луча? Наличие несоизмеримых отрезков позволяет утверждать, что нет. Действительно, если a — конечная десятичная дробь, то отрезок OA соизмерим с E . Следовательно, если мы отложим на луче h от начала O отрезок OM , несоизмеримый с E , то точке M этого луча не будет соответствовать конечная десятичная дробь, т. е. эта точка не совпадает ни с одной меткой.

Пусть точка M не совпадает ни с одной из меток. Покажем, что в этом случае мы можем сопоставить с точкой M единственным образом действительное положительное число α , выражающееся уже бесконечной десятичной дробью.

Из аксиомы Архимеда следует, что найдется такое натуральное число n , для которого $(n + 1)E > OM$, но $nE < OM$. Следовательно, точка M будет заключена между метками с координатами n и $n + 1$.

От меток с целыми координатами перейдем к меткам, координаты которых имеют один десятичный знак, затем два знака, три знака и т. д. Получим:

M находится между метками с координатами:

$$\begin{aligned} & n \text{ и } n + 1, \\ & n, p_1 \text{ и } n, (p_1 + 1), \\ & n, p_1 p_2 \text{ и } n, p_1 (p_2 + 1), \\ & n, p_1 p_2 p_3 \text{ и } n, p_1 p_2 (p_3 + 1), \\ & n, p_1 p_2 \dots p_t \text{ и } n, p_1 p_2 \dots (p_t + 1) \end{aligned}$$

и т. д.

В результате этого процесса (бесконечного перехода от меток порядка t к меткам высшего порядка) получим действительное число α , изображаемое бесконечной десятичной дробью $n, p_1 p_2 \dots p_t \dots$. Это число сопоставим с точкой M .

Из леммы следует, что в этом числе будет бесконечное множество десятичных знаков, отличных от нуля, так как между меткой с координатой n и точкой M существует бесконечное множество меток. Очевидно, что

$$n, p_1 p_2 \dots p_{t-1} p_t < \alpha < n, p_1 p_2 \dots p_{t-1} (p_t + 1)$$

при любом t .

Из этой же леммы следует, что число β , соответствующее другой точке N , отлично от α . Действительно, между точками M и N находится бесчисленное множество меток и поэтому числа α и β , начиная с некоторого десятичного знака (если целые части их равны), должны отличаться друг от друга.

Ясно также, что $\beta > \alpha$, если $ON > OM$. Действительно, между точками M и N существует метка A такая, что $\alpha < a$ и $a < \beta$, отсюда $\alpha < \beta$.

Итак, каждой точке луча соответствует единственное действительное число. Эти числа возрастают по мере удаления точек луча от его начала.

Мы можем сказать, что луч h арифметизирован, и принять его в качестве абстрактной линейки для измерения отрезков.

§ 31. Измерение отрезков

Перейдем теперь к измерению отрезков.

Установить систему измерения отрезков — значит каждому отрезку поставить в соответствие действительное неотрицательное число, называемое длиной этого отрезка, так, чтобы выполнялись следующие три условия:

- 1) *равные отрезки имеют равные длины;*
- 2) *если отрезок представляет сумму двух отрезков, то его длина равна сумме длин слагаемых отрезков;*
- 3) *длина определенного отрезка E равна единице.*

Из условия 2 следует, что большему отрезку соответствует большая длина.

Установим систему измерения отрезков при помощи абстрактной линейки — арифметизированного луча.

Пусть имеем произвольный отрезок AB . Возьмем на арифметизированном луче h точку M так, что $OM = AB$. Такая точка всегда существует и притом только одна. Точке M соответствует число α , которое назовем *длиной отрезка AB* и обозначим символом $\rho(AB)$:

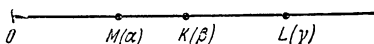
$$\rho(AB) = \alpha.$$

Отсюда следует, что любой отрезок имеет длину и что равные отрезки имеют равные длины. Ясно, что больший отрезок имеет большую длину, так как ему будет соответствовать более удаленная точка луча.

Легко видеть, что $\rho(E) = 1$. Отрезок E назовем *единицей измерения*.

Итак, условия 1 и 3 выполнены.

Чтобы найти длину отрезка AB , мы отложили его на нашей «линейке» от начала O , получили точку M , которой соответствует число α . Посмотрим, что получится, если этот отрезок мы отложим не от точки O , а от любой точки K в направлении от O к K (по лучу). При этом мы получим на «линейке» отрезок KL , равный AB



Черт. 84

(черт. 84). Пусть точкам K и L соответствуют числа β и γ . Докажем, что $\rho(AB) = \rho(KL) = \gamma - \beta$, т. е. $\alpha = \gamma - \beta$.

С л у ч а й 1. β и γ — конечные десятичные дроби. Будем считать, что они имеют одинаковое число десятичных знаков. Этого мы можем всегда достичь, приписывая справа у одной из дробей необходимое количество нулей.

Пусть

$$\beta = b, q_1 q_2 \dots q_t,$$

$$\gamma = c, s_1 s_2 \dots s_t.$$

Тогда

$$OL = \gamma \cdot 10^t E_t, \quad OK = \beta \cdot 10^t E_t.$$

Отсюда:

$$KL = OL - OK = (\gamma - \beta) 10^t E_t.$$

Так как $OM = KL$, то в отрезке OM отрезок E_t уложится точно $(\gamma - \beta) \cdot 10^t$ раз. Следовательно,

$$\alpha = \gamma - \beta.$$

С л у ч а й 2. Оба числа β и γ — бесконечные десятичные дроби, или таковой является одно из них.

Рассмотрим приближенные значения этих чисел с t знаками после запятой:

$$\beta_t^- = b, q_1 q_2 \dots q_{t-1} q_t \leq \beta < b, q_1 q_2 \dots q_{t-1} (q_t + 1) = \beta_t^+,$$

$$\gamma_t^- = c, s_1 s_2 \dots s_{t-1} s_t \leq \gamma < c, s_1 s_2 \dots s_{t-1} (s_t + 1) = \gamma_t^+.$$

Так как $\gamma > \beta$, то мы всегда можем взять такое число десятичных знаков, что $\beta_t^+ < \gamma_t^-$.

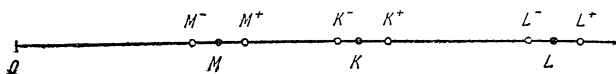
Числам β_t^- , β_t^+ , γ_t^- , γ_t^+ на арифметизированном луче соответствуют точки K^- , K^+ , L^- и L^+ (черт. 85). Так

как большему числу на луче соответствует более удаленная от начала точка, то отсюда следует, что

$$K + L - < KL < K - L +.$$

Из случая 1 следует, что

$$\rho(K + L -) = \gamma \overline{t} - \beta \overline{t}, \quad \rho(K - L +) = \gamma \overline{t} - \beta \overline{t}.$$



Черт. 85

Так как, кроме того,

$$\rho(K + L -) < \rho(KL) < \rho(K - L +),$$

а

$$\rho(KL) = \rho(AB) = \alpha,$$

то

$$\gamma \overline{t} - \beta \overline{t} < \alpha < \gamma \overline{t} - \beta \overline{t}$$

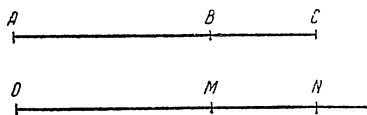
при любом t .

Из определения вычитания действительных чисел следует, что тогда

$$\alpha = \gamma - \beta.$$

Т е о р е м а. Если отрезок является суммой двух отрезков, то его длина равна сумме длин слагаемых отрезков.

Если $AC = AB + BC$, то $\rho(AC) = \rho(AB) + \rho(BC)$. Отложим отрезок AC на арифметизированном луче от начала O (черт. 86).



Черт. 86

Пусть точки A , B и C совпадут соответственно с точками O , M и N и пусть точкам M и N соответствуют числа α и β .

Тогда $\rho(AC) = \beta$, $\rho(AB) = \alpha$ и по доказанному

$\rho(BC) = \beta - \alpha$. Так как $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$, то $\rho(AC) = \rho(AB) + \rho(BC)$.

Таким образом, условие 2 также выполнено. Этим доказано, что нами установлена система измерения отрезков при помощи арифметизированного луча.

Покажем, что если мы установим измерение отрезков каким-либо другим способом, при той же единице измерения E , то для каждого отрезка получим ту же длину.

Отметим предварительно следующее очевидное следствие из условия 2: *если отрезок представляет сумму нескольких отрезков, то его длина равна сумме длин слагаемых отрезков.*

Каков бы ни был способ измерения отрезков, $\rho(E) = 1$ (условие 3). Если разобьем отрезок E на n равных частей, то длины этих частей будут равны между собой (условие 1), а сумма длин их равна длине отрезка E (условие 2). Пусть x — длина одной части. Тогда сумма их длин равна nx .

Отсюда: $nx = 1$; $x = \frac{1}{n}$.

Итак,

$$\rho\left(\frac{E}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Отсюда

$$\rho(E_t) = \frac{1}{10^t}, \text{ где } E_t = \frac{E}{10^t}.$$

Если в отрезке AB отрезок E_t укладывается a раз, то $\rho(AB) = a \cdot \frac{1}{10^t}$. Но при рассмотренном нами способе измерения отрезков длина отрезка AB равна тому же числу. Следовательно, при любом способе измерения отрезков длина отрезка арифметизированного луча от начала до какой-либо метки M равна конечной десятичной дроби, соответствующей этой метке. Длина любого отрезка OM арифметизированного луча заключена между числами, соответствующими двум меткам, расположенным по разные стороны от точки M . Поэтому при любом способе измерения длина отрезка OM равна числу α , которое соответствует точке M на арифметизированном луче.

Отсюда следует, что при любом способе измерения мы получаем при данной единице измерения E для каждого отрезка одну и ту же длину.

Рассмотрим отрезок AB , соизмеримый с единицей измерения E . Пусть $\frac{1}{n}$ отрезка E укладывается в отрезке AB m раз:

$$AB = m \cdot \frac{E}{n}.$$

Так как

$$\rho\left(\frac{E}{n}\right) = \frac{1}{n}, \text{ то } \rho(AB) = m \rho\left(\frac{E}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

Пусть при измерении с помощью арифметизированного луча мы получим, что $\rho(AB) = \alpha$. Так как в обоих случаях мы должны получить одну и ту же длину, то $\alpha = \frac{m}{n}$.

Следовательно, числу α на луче будет соответствовать или конечная десятичная дробь, или бесконечная периодическая дробь.

§ 32. Переход от одной единицы измерения к другой. Отношение отрезков

Длина отрезка зависит от единицы измерения. Решим теперь вопрос, как перейти от одной единицы измерения к другой. Положим, мы нашли длину отрезка AB при единице измерения E . Какова будет длина его при новой единице измерения E' ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Т е о р е м а. Длина отрезка AB при единице измерения E' равна длине этого отрезка при единице измерения E , умноженной на длину отрезка E при единице измерения E' , т. е.

$$\rho_{E'}(AB) = \rho_E(AB) \cdot \rho_{E'}(E).$$

Обозначим:

$$\rho_E(AB) = a; \rho_{E'}(AB) = b; \rho_{E'}(E) = e.$$

Нам надо доказать, что $b = ae$.

Возьмем $E_t = \frac{E}{10^t}$. Отрезок E разделен на 10^t равных частей. Длины этих частей равны между собой и в сумме дают длину всего отрезка E . Следовательно,

$$\rho_{E'}(E) = 10^t \rho_{E'}(E_t),$$

или

$$\rho_{E'}(E_t) = \frac{1}{10^t} \rho_{E'}(E) = \frac{e}{10^t}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда число a выражается конечной десятичной дробью:

$$a = n, p_1 p_2 \dots p_t.$$

Тогда

$$AB = (a \cdot 10^t) E_t.$$

Отсюда:

$$\rho_{E'}(AB) = (a \cdot 10^t) \rho_{E'}(E_t),$$

или

$$b = (a \cdot 10^t) \cdot \frac{e}{10^t} = ae.$$

Пусть теперь число a выражается бесконечной десятичной дробью:

$$a = n, p_1 p_2 \dots p_t \dots$$

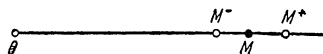
Рассмотрим приближенные значения a :

$$a^-_t = n, p_1 p_2 \dots p_t \quad (\text{с недостатком})$$

и

$$a^+_t = n, p_1 p_2 \dots p_{t-1} (p_t + 1) \quad (\text{с избытком}).$$

На арифметизированном луче (при единице измерения E) числам a , a^-_t и a^+_t соответствуют точки M , M^- и M^+ (черт. 87). При этом точку M мы получим, откладывая отрезок AB на арифметизированном луче от начала O ($OM = AB$), M^- и M^+



Черт. 87

явятся метками с координатами a^-_t и a^+_t на этом луче. Так как точке M соответствует число a , то она будет находиться между точек M^- и M^+ . Имеем:

$$OM^- < OM < OM^+,$$

$$\rho_E(OM^-) = a^-_t; \rho_E(OM) = \rho_E(AB) = a; \rho_E(OM^+) = a^+_t.$$

Так как большему отрезку соответствует большая длина при одной и той же единице измерения, то при единице измерения E' получим:

$$\rho_{E'}(OM^-) < \rho_{E'}(OM) < \rho_{E'}(OM^+).$$

В соответствии с рассмотренным выше случаем получаем:

$$a^-_t e < b < a^+_t e.$$

Так как эти неравенства имеют место при любом числе десятичных знаков t для приближенных значений числа a , то

$$b = ae.$$

Рассмотрим два отрезка AB и CD . Пусть они измерены сначала при единице измерения E , а потом при единице измерения E' .

Тогда

$$\rho_{E'}(AB) = \rho_E(AB) \rho_{E'}(E),$$

$$\rho_{E'}(CD) = \rho_E(CD) \rho_{E'}(E).$$

Отсюда:

$$\frac{\rho_{E'}(AB)}{\rho_{E'}(CD)} = \frac{\rho_E(AB)}{\rho_E(CD)}.$$

Мы приходим к важному выводу: отношение длин двух отрезков не зависит от выбора единицы измерения.

Отношением отрезков называется отношение их длин. Отношение отрезка AB к отрезку CD записывается так:

$$\frac{AB}{CD}.$$

По определению:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\rho_E(AB)}{\rho_E(CD)}.$$

Совершенно очевидно, что *отношение отрезков не зависит от единицы измерения.*

Если в качестве единицы измерения взять отрезок $E' = CD$, то $\rho_{E'}(CD) = 1$ и $\frac{AB}{CD} = \rho_{E'}(AB)$.

Отношение отрезка AB к отрезку CD равно длине первого отрезка при условии, что единица измерения равна второму отрезку.

Если отрезки AB и CD соизмеримы, то их отношение является рациональным числом, так как оно равно $\rho_{CD}(AB)$. Очевидно и обратное: *если отношение отрезков выражается рациональным числом $\frac{m}{n}$, то отрезки соизмеримы*, так как тогда $\rho_{CD}(AB) = \frac{m}{n}$, а это обозначает, что $\frac{1}{n}$ часть отрезка CD укладывается в AB точно m раз.

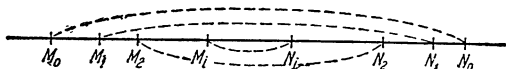
Отсюда следует, что *если отрезки несоизмеримы, то их отношение выражается иррациональным числом.*

§ 33. Задача, обратная задаче измерения отрезков

Всякой точке арифметизированного луча соответствует положительное действительное число, причем разным точкам соответствуют разные числа. Можем ли мы утверждать, что между точками этого луча и множеством действительных неотрицательных чисел установлено взаимно однозначное соответствие?

Для положительного ответа на этот вопрос требуется еще одна аксиома.

Пусть на прямой дана последовательность отрезков $M_0N_0, M_1N_1, M_2N_2, \dots$ (черт. 88), обладающая следующими свойствами:



Черт. 88

- 1) эта последовательность бесконечна;
- 2) все точки любого отрезка M_kN_k принадлежат предыдущему отрезку $M_{k-1}N_{k-1}$;
- 3) не существует отрезка XU , общего для всех отрезков данной последовательности.

Будем говорить в таком случае, что нам дана бесконечно убывающая последовательность вложенных отрезков.

Аксиома (аксиома Кантора). *Если дана бесконечно убывающая последовательность вложенных отрезков, то существует точка, общая для всех отрезков данной последовательности.*

Легко видеть, что точка, о которой говорится в аксиоме, единственная. Действительно, если бы существовали две такие общие точки X и Y , то существовал бы отрезок XU , общий для всех отрезков указанной последовательности, что не имеет места.

Теорема. *Для любого положительного числа α существует точка на арифметизированном луче, которой это число соответствует.*

Если α — конечная десятичная дробь, то такой точкой будет, очевидно, одна из меток на луче.

Пусть α — бесконечная десятичная дробь:

$$\alpha = a, p_1 p_2 \dots p_t \dots$$

Рассмотрим последовательности приближенных значений α с недостатком и с избытком:

$$\begin{aligned} \alpha_0^- &= a, & \alpha_0^+ &= a + 1, \\ \alpha_1^- &= a, p_1, & \alpha_1^+ &= a, (p_1 + 1), \\ \alpha_2^- &= a, p_1 p_2, & \alpha_2^+ &= a, p_1 (p_2 + 1), \\ &\dots & & \dots \\ \alpha_t^- &= a, p_1 p_2 \dots p_t, & \alpha_t^+ &= a, p_1 p_2 \dots p_{t-1} (p_t + 1). \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

Этим числам последовательности соответствуют последовательности меток на арифметизированном луче (черт. 88):

$$M_0(\alpha_0^-), M_1(\alpha_1^-), M_2(\alpha_2^-), \dots$$

и

$$N_0(\alpha_0^+), N_1(\alpha_1^+), N_2(\alpha_2^+), \dots$$

Всякая точка M_i на луче будет правее предшествующей точки M_{i-1} . Точка N_i будет правее точки M_i и левее предшествующей точки N_{i-1} . Отсюда следует, что последовательность отрезков $M_0N_0, M_1N_1, M_2N_2, \dots$ является бесконечной последовательностью вложенных отрезков.

Длина отрезка M_tN_t будет:

$$\rho(M_tN_t) = \alpha_t^+ - \alpha_t^- = \frac{1}{10^t}.$$

При неограниченном возрастании t длина $\rho(M_tN_t)$ может стать как угодно малой. Поэтому не существует отрезка XY , общего для всех отрезков данной последовательности, так как иначе всегда было бы

$$\rho(M_tN_t) > \rho(XY),$$

что в силу сказанного выше невозможно.

Так как рассматриваемая последовательность удовлетворяет аксиоме Кантора, то существует единственная точка X , общая для всех отрезков M_tN_t . Пусть этой точке соответствует число x . Тогда $\alpha_t^- < x < \alpha_t^+$ при любом t , т. е. все приближенные значения по недостатку и избытку числа α являются таковыми же и для числа x . Ссылаясь на сведения из теории действительного числа, можно утверждать, что $x = \alpha$. Теорема доказана.

Таким образом, взаимно однозначное соответствие между точками арифметизированного луча и множеством действительных неотрицательных чисел установлено.

Отсюда мы можем сделать вывод, что каково бы ни было действительное положительное число α , существует отрезок, длина которого при данной единице измерения равна этому числу.

§ 34. Пропорциональные отрезки

Отрезки AB и CD называются пропорциональными соответствующим отрезкам KL и MN , если отношение первых двух отрезков равно отношению двух других отрезков:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{KL}{MN}.$$

В соответствии с определением отношения отрезков в этом равенстве под AB , CD и т. д. мы должны понимать не сами отрезки, а их длины. Поэтому по существу здесь мы имеем обыкновенную числовую пропорцию:

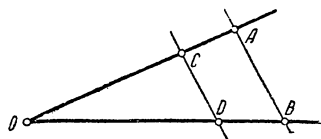
$$\frac{\rho(AB)}{\rho(CD)} = \frac{\rho(KL)}{\rho(MN)}.$$

В силу этого мы можем применять для данной пропорции все известные нам свойства числовой пропорции.

Т е о р е м а. Две параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки, считая эти отрезки от вершины до параллельных.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть AB и CD — данные параллельные прямые, а A, B, C и D — точки пересечения их со сторонами данного угла O . Расположение точек указано на чертеже (черт. 89). Нам надо доказать, что



Черт. 89

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}.$$

Так как (§ 32):

$$\frac{OA}{OC} = \rho_{OC}(OA) \quad \text{и} \quad \frac{OB}{OD} = \rho_{OD}(OB),$$

то теорема будет доказана, если установим справедливость равенства:

$$\rho_{OC}(OA) = \rho_{OD}(OB),$$

т. е. длина отрезка OA при единице измерения OC равна длине отрезка OB при единице измерения OD .

Пусть стороны угла представляют арифметизированные лучи с единичными отрезками $OC = E$ (для луча OC) и $OD = E'$ (для луча OD) и пусть точка A совпадает с меткой $a = n, p_1 p_2 \dots p_t$, т. е.

$$\rho_E(OA) = a.$$

Если $E_t = \frac{1}{10^t} E$, т. е. $E = 10^t E_t$, то

$$OA = a \cdot 10^t E_t.$$

Следовательно, если отрезок E_t откладывать последовательно на луче OC от вершины O , то отрезок OC разделится на 10^t равных частей, а отрезок OA — на $a \cdot 10^t$ таких же частей. Если, далее, через полученные точки деления мы проведем прямые, параллельные CD , то отрезок OD разделится на 10^t равных частей, а OB — на $a \cdot 10^t$ таких же частей. Пусть

$$E'_t = \frac{1}{10^t} E', \text{ т. е. } E' = OD = 10^t E'_t.$$

Тогда

$$OB = a \cdot 10^t E'_t.$$

Отсюда следует, что $\rho_{E'}(OB) = a$, т. е.

$$\rho_{E'}(OB) = \rho_E(OA),$$

а это и требовалось установить.

Пусть теперь $\rho_E(OA) = \alpha$, где α — бесконечная десятичная дробь: $\alpha = n, p_1 p_2 \dots p_t \dots$

Возьмем на луче OC точки A^- и A^+ , соответствующие меткам $\alpha_t^- = n, p_1 p_2 \dots p_t$ и $\alpha_t^+ = n, p_1 p_2 \dots p_{t-1} (p_t + 1)$.

Тогда $OA^- < OA < OA^+$.

Проведем через A^- и A^+ прямые, параллельные AB (черт. 90). На луче OD мы получим соответственно точки B^- и B^+ , причем

$$OB^- < OB < OB^+.$$

По рассмотренному случаю:

$$\rho_{E'}(OB^-) = \alpha_t^- \text{ и } \rho_{E'}(OB^+) = \alpha_t^+.$$

Поэтому

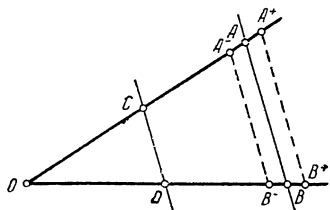
$$\alpha \frac{1}{t} < \rho_{E'}(OB) < \alpha + \frac{1}{t}$$

при любом t . Отсюда следует, что

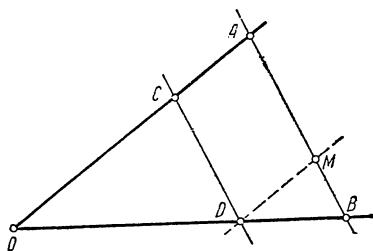
$$\rho_{E'}(OB) = \alpha, \text{ т. е. } \rho_{E'}(OB) = \rho_E(OA).$$

Выведем теперь некоторые следствия из доказанной теоремы.

Для рассматриваемых отрезков мы имеем пропорцию. $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$. Будем при этом считать, что $OC < OA$.



Черт. 90



Черт. 91

Из производной пропорции $\frac{OA - OC}{OC} = \frac{OB - OD}{OD}$ следует также, что $\frac{AC}{OC} = \frac{BD}{OD}$ или $\frac{AC}{BD} = \frac{OC}{OD}$, т. е. следует пропорциональность отрезков AC и BD отрезкам OC и OD .

Из производной пропорции $\frac{AC}{OC + AC} = \frac{BD}{OD + BD}$ следует, что $\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$, т. е. следует пропорциональность отрезков AC и OA отрезкам BD и OB .

Проведем теперь через точку D прямую, параллельную OA (черт. 91). Пусть она пересечет AB в точке M . Тогда, применяя последнее следствие для угла B и параллельных прямых OA и DM , получим:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{AM}{AB}.$$

Так как $AM = CD$, то имеем:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}.$$

Итак, мы можем записать, что для $\triangle OAB$ и прямой CD

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. Если провести прямую, пересекающую боковые стороны треугольника и параллельную основанию его, то отношение основания к отрезку секущей, лежащему внутри треугольника, равно отношению боковой стороны к ее отрезку, не прилегающему к основанию.

Обратная теорема. Если на одной стороне $\angle AOB$ от его вершины отложить отрезки OA и OC (черт. 89), а на другой стороне этого угла отложить отрезки OB и OD такие, что

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD},$$

то прямые AB и CD будут параллельны.

Пусть от вершины угла O отложены отрезки OC и OA на одной из его сторон и отрезки OD и OB на другой стороне и пусть при этом $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$. Проведем прямую AB и через точку C прямую, параллельную AB . Эта прямая, очевидно, пересечет луч OB в некоторой точке D' . Тогда по прямой теореме

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD'}.$$

Сравнивая полученную пропорцию и данную, делаем вывод, что

$$OD = OD',$$

т. е. точки D и D' совпадают.

Отсюда следует, что $CD \parallel AB$, что и требовалось доказать.

ГЛАВА V

ГОМОТЕТИЯ И ПОДОБИЕ

§ 35. Определение и свойства гомотетии

Определим умножение вектора на действительное число k следующим образом: произведение $k \vec{AB}$ представляет вектор $\vec{AB'}$, одинаково направленный с вектором \vec{AB} при $k > 0$

и противоположно направленный с этим вектором при $k < 0$, причем

$$\frac{AB'}{AB} = |k|.$$

Будем при этом употреблять обычный знак равенства:

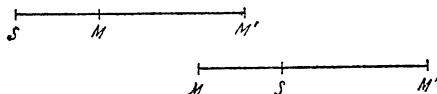
$$\vec{AB'} = k \vec{AB}.$$

Гомотетией с центром S и коэффициентом k ($k \neq 0$) назовем преобразование, при котором любая точка M отображается в точку M' , удовлетворяющую условию $\vec{SM'} = k \vec{SM}$.

При этом мы принимаем, что центр гомотетии соответствует сам себе.

Из определения гомотетии следует, что:

- а) точки S , M и M' лежат на одной прямой;
- б) при $k > 0$ соответственные точки M и M' лежат по одну сторону от центра S (черт. 92). В этом случае гомотетия называется *прямой*;



Черт. 92

- в) при $k < 0$ соответствующие точки M и M' лежат по разные стороны от центра S . В этом случае гомотетия называется *обратной*.

Гомотетия иначе называется *центрально-подобным преобразованием*. Будем ее обозначать символом φ .

Рассмотрим некоторые свойства гомотетии, вытекающие непосредственно из ее определения.

1. При гомотетии каждой точке соответствует только одна точка, разным точкам соответствуют также разные точки. В силу этого гомотетия является взаимно однозначным точечным преобразованием.

2. Преобразование, обратное гомотетии, есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k' = \frac{1}{k}$.

Действительно, при обратном преобразовании, отображающем точку M' в точку M , выполняются все условия гомотетии, причем абсолютная величина коэффициента гомотетии будет равна $\frac{SM}{SM'}$.

3. Тождественное преобразование является частным случаем прямой гомотетии, когда $k = 1$ и центр произволен.

4. Отражение от точки на плоскости (§ 25) является частным случаем обратной гомотетии, когда $k = -1$, центр гомотетии является при этом центром отражения.

5. Произведение прямой гомотетии на отражение от центра ее есть обратная гомотетия с тем же центром. Обратную гомотетию с коэффициентом k ($k < 0$) всегда можно считать произведением прямой гомотетии с тем же центром на отражение от него.

Пусть задана гомотетия φ и фигура F . Каждая точка M этой фигуры отображается при этом в соответствующую ей точку M' , что запишем так:

$$\varphi(M) = M'.$$

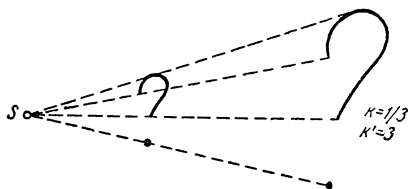
Совокупность точек M' образует фигуру F' , которая называется гомотетичной фигуре F :

$$\varphi(F) = F'.$$

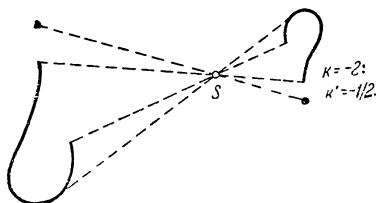
Гомотетия φ^{-1} , обратная гомотетии φ , отображает, очевидно, фигуру F' в фигуру F :

$$\varphi^{-1}(F') = F.$$

Следовательно, фигура F при этом будет гомотетична фигуре F' . Фигуры F и F' взаимно гомотетичны



Черт. 93 а



Черт 93 б

друг с другом. Если гомотетия φ (а значит, и обратная гомотетия φ^{-1}) прямая, то ее центр называется *внешним центром подобия* фигур F и F' (черт. 93 а).

Если же φ является обратной гомотетией, то ее центр называется *внутренним центром подобия* данных фигур (черт. 93 б).

Т е о р е м а. *Фигура, гомотетичная отрезку, есть отрезок; гомотетичные отрезки или параллельны, или лежат на одной прямой, отношение их равно абсолютной величине коэффициента гомотетии.*

Пусть задана гомотетия φ и отрезок AB . В силу свойства 5 при доказательстве достаточно рассмотреть случай, когда φ — прямая гомотетия.

Положим сначала при доказательстве, что центр гомотетии не лежит на прямой AB (черт. 94). Имеем:

$$\varphi(A) = A', \quad \varphi(B) = B',$$

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = k.$$

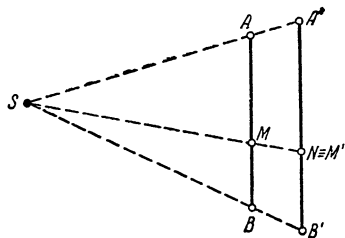
В силу обратной теоремы из § 34 прямые AB и $A'B'$ параллельны. Возьмем произвольную точку M отрезка AB и обозначим через N точку пересечения луча SM с отрезком $A'B'$. Тогда по прямой теореме из § 34:

$$\frac{SN}{SM} = \frac{SA'}{SA} = k.$$

Следовательно, точка N гомотетична точке M . Итак, все точки отрезка AB отобразятся в точки отрезка $A'B'$. Легко также видеть, что любая точка N отрезка $A'B'$ гомотетична некоторой точке отрезка AB , а именно той, в которой AB пересекается с лучом SN . Итак, отрезок $A'B'$ гомотетичен отрезку AB . Кроме того, по следствию из указанной прямой теоремы мы можем записать, что

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = k.$$

Пусть теперь центр гомотетии S лежит на прямой AB (черт. 95 а). Имеем: $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$. Точки A' и B' лежат, очевидно, тоже на прямой AB . Пусть M — произ-



Черт. 94

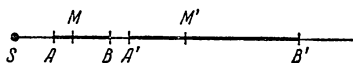
вольная точка отрезка AB , а M' — ей соответствующая при данной гомотетии. Положим, что S лежит вне отрезка AB , причем $SA < SM < SB$. Тогда из двойного равенства

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SM'}{SM} = \frac{SB'}{SB}$$

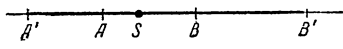
следует, что

$$SA' < SM' < SB',$$

т. е. точка M' принадлежит отрезку $A'B'$. Из этого же равенства следует, что каждая точка M' отрезка $A'B'$ гомо-



Черт. 95 а

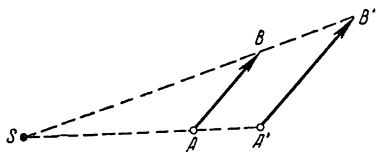


Черт. 95 б

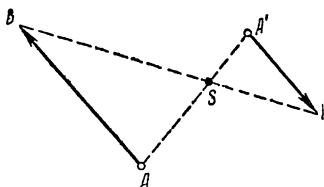
тетична некоторой точке M отрезка AB . Итак, отрезок AB гомотетией φ отображается в отрезок $A'B'$.

Данное утверждение легко установить также для случая, когда S принадлежит отрезку AB (черт. 95 б). В этом случае отрезок AB распадается на отрезки SA и SB , которые отображаются соответственно в отрезки SA' и SB' . Следовательно, весь отрезок AB отображается в отрезок $A'B'$.

Учитывая направление отрезков, из данной теоремы можно получить следствие:



Черт. 96 а



Черт. 96 б

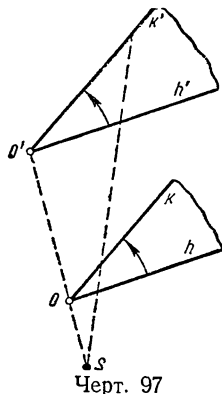
Фигура, гомотетичная вектору, есть вектор. При прямой гомотетии гомотетичные векторы ориентированы одинаково, а при обратной — противоположно (черт. 96 а, 96 б). Отношение длин гомотетичных векторов равно абсолютной величине коэффициента гомотетии.

Кроме того, из данной теоремы вытекают следующих два предложения, доказательство которых предоставляем читателю:

1. *Фигура, гомотетичная лучу, является лучом, одинаково направленным с данным при прямой гомотетии и противоположно направленным с ним при обратной гомотетии (§ 22).*

2. *Фигура, гомотетичная углу, представляет угол, одинаково ориентированный с данным (§ 24) и равный ему (черт. 97).*

Мы можем сказать, следовательно, что гомотетия сохраняет величину угла и его ориентацию.



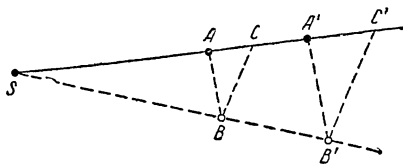
Черт. 97

§ 36. Различные способы задания гомотетии

1. Как мы знаем, гомотетия может быть задана центром S и коэффициентом k . Однако такой способ не всегда удобен для геометрических построений.

2. Гомотетия может быть задана центром S и парой соответственных точек A и A' , расположенных на одной прямой с центром S . При таком задании коэффициент гомотетии определяется через отношение $\frac{SA'}{SA}$.

Если B — точка, не лежащая на прямой SA , то для построения ей соответствующей точки B' проведем прямые SB и AB , а через точку A' — прямую, параллельную AB .



Черт. 98

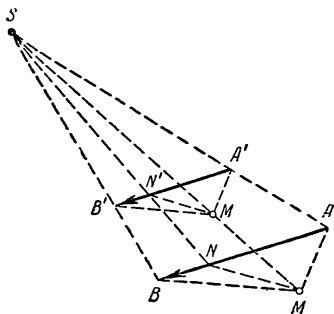
Пересечение последней с прямой SB даст искомую точку B' (черт. 98).

Если точка C лежит на прямой SA , то для построения гомотетичной ей точки C' можно воспользоваться парой соответственных точек B и B' , не лежащих на SA .

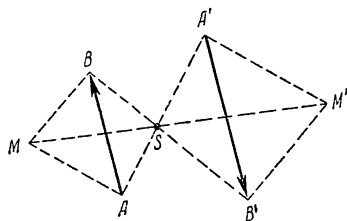
3. Гомотетия может быть задана двумя парами соответственных точек A, A' и B, B' , которые удовлетворяют следующему условию: векторы \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A'B'}$ или параллельны, или принадлежат одной прямой. Кроме того, если векторы \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A'B'}$ имеют одинаковое направление и не совпадают, то они не равны между собой. Покажем, что при соблюдении этих условий гомотетия определена.

а) Пусть векторы \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A'B'}$ параллельны (черт. 99 а, 100 б). Проведем прямые AA' и BB' , которые пересекутся в некоторой точке S , и возьмем число k , равное отношению $\frac{A'B'}{AB}$

при одинаковой ориентации векторов \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A'B'}$ и этому отношению со знаком минус при противоположной ориентации данных векторов. В силу § 34 мы можем записать, что $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB}$. Легко видеть, также, что при $k > 0$ S лежит вне отрезка AA' , а при $k < 0$ — внутри него.



Черт. 99 а



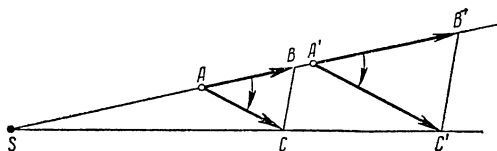
Черт. 99 б

Зададим теперь гомотетию φ центром S и коэффициентом k . Тогда точки A и B отобразятся в точки A' и B' . Гомотетия φ является, таким образом, искомой.

Построение точки M' , гомотетичной точке M , можно провести, не пользуясь центром S . Для этого проведем через точки A' и B' прямые, параллельные соответственно прямым AM и BM , и построим точку их пересечения M' . Точка, гомотетичная M , в силу свойств гомотетии, должна лежать на тех же прямых. Отсюда следует, что она совпадает с M' .

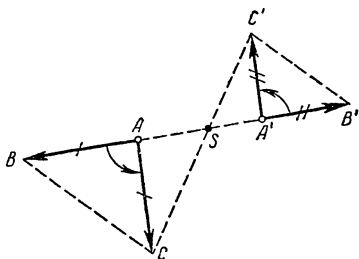
Если точка N лежит на AB , то для построения ей гомотетичной точки возьмем сначала точку M , не лежащую на AB , построим ей соответственную точку M' и воспользуемся в том же порядке парами A, A' и M, M' .

б) Пусть теперь векторы \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A'B'}$ принадлежат одной



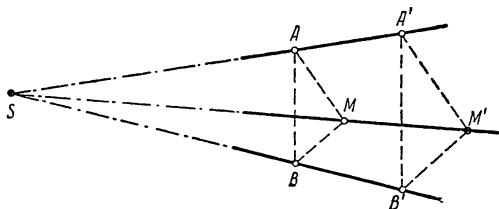
Черт. 100 а

прямой (черт. 100 а, 100 б). Повернем их вокруг точек A и A' в одном направлении на равные углы. Пусть они займут положения AC и $A'C'$. Зададим гомотегию двумя парами точек A, A' и C, C' . Легко видеть, что прямые BC и $B'C'$ параллельны. Отсюда следует, что при заданной гомотегии точки B и B' будут соответственными. Следовательно, и в этом случае гомотегия вполне определена.



Черт. 100 б

Задача. Провести прямую через точку M и точку пересечения двух прямых a и b , если последняя находится за пределами чертежа (следовательно, пользоваться ею при построении нельзя).



Черт. 101

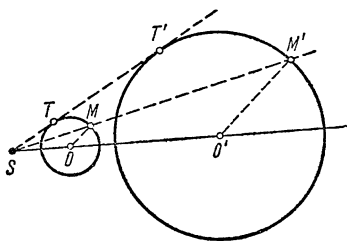
Пусть S — точка пересечения прямых a и b . Нам надо построить прямую MS , не строя саму точку S (черт. 101).

Для этого проведем две параллельные прямые AB и $A'B'$, пересекающие прямые a и b соответственно в точках A, A' и B, B' . Зададим гомотетию этими двумя парами точек и построим точку M' , гомотетичную точке M способом, указанным выше. Прямая MM' должна пройти через центр гомотетии и поэтому будет искомой.

§ 37. Гомотетия окружностей

Будем в дальнейшем рассматривать гомотетию на плоскости, т. е. будем считать, что центр гомотетии и гомотетичные фигуры расположены в одной плоскости.

Т е о р е м а. *Фигура, гомотетичная окружности, есть окружность.*



Черт. 102

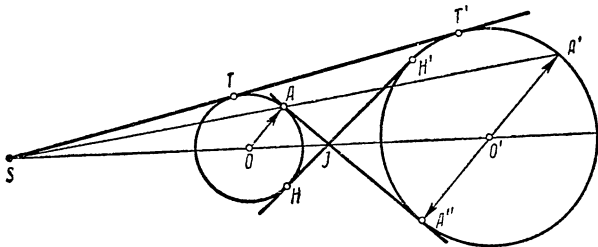
Пусть задана прямая гомотетия φ и окружность O (черт. 102). Ее центр O и произвольная точка M отображаются соответственно в O' и M' , причем $O'M' \parallel OM$ и $\frac{O'M'}{OM} = k$.

Отсюда:

$O'M' = k \cdot OM = \text{const}$
для любой точки M дан-

ной окружности.

Следовательно, все точки окружности O отобразятся в точки окружности O' . При гомотетии φ^{-1} , обратной гомотетии φ , все точки окружности O' отобразятся в точки окружности O . Отсюда вытекает, что всякая точка M' окружности O' гомотетична некоторой точке окружности O . Значит, окружность O' гомотетична окружности O .



Черт. 103

Т е о р е м а. Любые две неравные окружности можно рассматривать как гомотетичные фигуры и притом двумя различными способами (как прямо гомотетичные и как обратно гомотетичные фигуры).

Пусть даны две такие окружности O и O' (черт. 103). Проведем в них два параллельных и одинаково направленных радиуса OA и $O'A'$ и зададим прямую гомотетию двумя парами соответственных точек O, O' и A, A' (что возможно, так как $OA \neq O'A'$). При такой гомотетии в силу предыдущей теоремы одна из данных окружностей отображается в другую. Центр гомотетии S (внешний центр подобия данных окружностей) является точкой пересечения прямой AA' с линией центров OO' .

Возьмем теперь два параллельных и противоположно направленных радиуса OA и $O'A''$ и зададим обратную гомотетию двумя парами соответственных точек O, O' и A, A'' . Очевидно, что при этом окружности будут также гомотетичны. Центр гомотетии (внутренний центр подобия данных окружностей) является точкой пересечения прямой AA'' с линией центров OO' .

Если из центра подобия можно провести касательную к одной из окружностей, то это будет общая касательная данных окружностей. Действительно, пусть прямая ST касается окружности O и T — точка касания. Пусть точке T в окружности O' соответствует точка T' . Так как прямая ST с окружностью O имеет только одну точку, то с окружностью O' она имеет тоже только одну общую точку T' (иначе двум различным точкам окружности O' соответствовала бы только одна точка окружности O , что невозможно), т. е. касается ее в этой точке.

Отсюда вытекает следующий способ построения общих касательных к двум окружностям: строим указанным выше способом центр подобия их и из него проводим касательную к одной из данных окружностей.

§ 38. Произведение гомотетий

Т е о р е м а. Результат последовательного выполнения двух гомотетий с общим центром есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом, равным произведению коэффициентов данных гомотетий.

Первая гомотетия φ_1 задана центром S и коэффициентом k_1 , вторая гомотетия φ_2 задана центром S и коэффициентом k_2 . Обозначим результирующее преобразование через φ :

$$\varphi = \varphi_2 \varphi_1.$$

Рассмотрим произвольную точку M (черт. 104, а, б). Для нее получим:

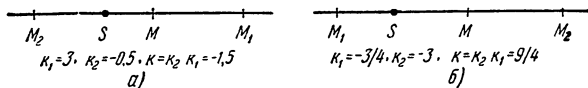
$$\varphi_1(M) = M_1, \quad \varphi_2(M_1) = M_2,$$

$$\frac{SM_1}{SM} = |k_1|, \quad \frac{SM_2}{SM_1} = |k_2|.$$

Отсюда:

$$\varphi(M) = M_2; \quad \frac{SM_2}{SM} = \frac{SM_2}{SM_1} \cdot \frac{SM_1}{SM} = |k_2 k_1| = |k|, \text{ где } k = k_2 k_1.$$

Точка S остается неподвижной, точки M_1 и M_2 лежат на прямой SM . Легко также видеть, что при $k > 0$ точки M_2



Черт. 104

и M лежат по одну сторону от S , а при $k < 0$ эти точки лежат по разные стороны от S .

Отсюда следует, что преобразование φ есть гомотетия с тем же центром S и коэффициентом k .

Заметим, что в рассматриваемом случае произведение гомотетий перестановочно, т. е. $\varphi_2 \varphi_1 = \varphi_1 \varphi_2$.

Т е о р е м а. *Результат последовательного выполнения двух гомотетий с разными центрами в случае, если произведение их коэффициентов отлично от единицы, есть гомотетия с коэффициентом, равным произведению коэффициентов данных гомотетий, и центром, лежащим на прямой, соединяющей центры данных гомотетий.*

Пусть первая гомотетия φ_1 задана центром S_1 и коэффициентом k_1 , а вторая гомотетия φ_2 задана центром S_2 и коэффициентом k_2 , причем $k = k_2 k_1 \neq 1$.

Обозначим результирующее преобразование через φ :

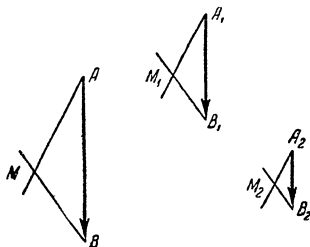
$$\varphi = \varphi_2 \varphi_1.$$

Рассмотрим произвольный вектор \overrightarrow{AB} и подвергнем его преобразованию φ (черт. 105).

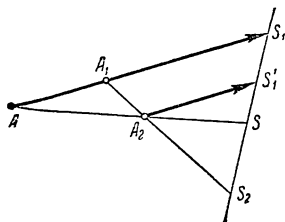
$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{A_1B_1}, \\ \varphi_2(\overrightarrow{A_1B_1}) &= \overrightarrow{A_2B_2} \end{aligned} \right\} \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A_2B_2}.$$

Вектор \overrightarrow{AB} сначала отобразится в вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, а затем вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ отобразится в вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$.

Если $k > 0$, то либо все векторы \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ одинаково ориентированы (при $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$), либо вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$ ориентирован противоположно вектору \overrightarrow{AB} и вектору $\overrightarrow{A_1B_1}$ (при $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$). В обоих случаях ориентация векторов \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A_2B_2}$ одинакова.



Черт. 105



Черт. 106

Если $k < 0$ (при $k_1 < 0$ и $k_2 > 0$ или при $k_1 > 0$ и $k_2 < 0$), то вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ или одинаково ориентирован с вектором \overrightarrow{AB} и противоположно с вектором $\overrightarrow{A_2B_2}$, или наоборот. В обоих случаях векторы \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A_2B_2}$ ориентированы противоположно.

Далее, находим:

$$\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} \cdot \frac{A_1B_1}{AB} = |k_2 k_1| = |k|.$$

Так как $k \neq 1$, то векторы \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A_2B_2}$ не могут быть равными по величине при одинаковой ориентации. Поэтому мы можем задать гомотеию двумя парами соответственных точек A , A_2 и B , B_2 ; коэффициентом этой гомотеии в силу проведенного исследования будет число k .

Рассмотрим теперь произвольную точку M . Для нее получим:

$$\varphi_1(M) = M_1, \quad \varphi_2(M_1) = M_2, \quad \varphi(M) = M_2;$$

$$AM \parallel A_1M_1 \parallel A_2M_2, \quad BM \parallel B_1M_1 \parallel B_2M_2.$$

Чтобы получить точку M_2 , надо через точки A_2 и B_2 провести прямые, параллельные AM и BM , и построить точку их пересечения. Но таким же путем мы будем строить точку, гомотетичную точке M при заданной выше гомотетии. Следовательно, преобразование φ является гомотетией, заданной двумя парами соответственных точек — A, A_2 и B, B_2 .

Найдем теперь центр этой гомотетии. Рассмотрим для этого вектор $\overrightarrow{AS_1}$ (черт. 106). При гомотетии φ_1 он отображается в вектор $\overrightarrow{A_1S_1}$ (A_1 лежит на прямой $\overrightarrow{AS_1}$), гомотетия φ_2 отображает вектор $\overrightarrow{A_1S_1}$ в вектор $\overrightarrow{A_2S'_1}$, причем точка S'_1 лежит на прямой S_1S_2 .

Гомотетия φ отображает, следовательно, вектор $\overrightarrow{AS_1}$ в вектор $\overrightarrow{A_2S'_1}$, центр ее S лежит на пересечении прямых AA_2 и $S_1S'_1$, т. е. на прямой S_1S_2 . Итак, теорема доказана полностью.

Что же произойдет, если $k = k_2k_1 = 1$? В этом случае векторы \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A_2B_2}$ оказываются равными и одинаково ориентированными. Значит, векторы смещения точек A и B , т. е. векторы $\overrightarrow{AA_2}$ и $\overrightarrow{BB_2}$, будут равны и одинаково ориентированы.

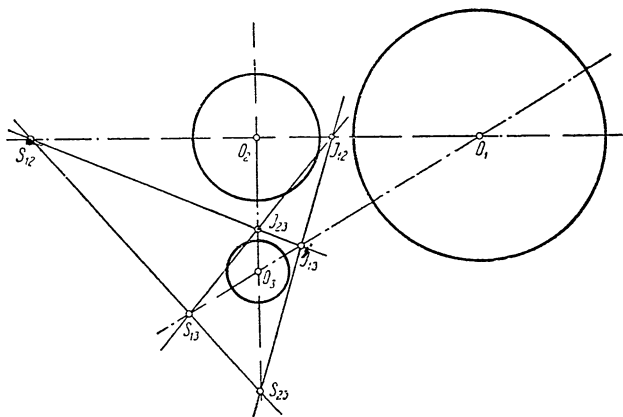
Тоже можно сказать про любые другие точки, например, про векторы смещения точек A и M , так как векторы \overrightarrow{AM} и $\overrightarrow{A_2M_2}$ будут тоже равны между собой и одинаково ориентированы. Следовательно, преобразование φ при $k = 1$ является переносом.

С л е д с т в и е. Шесть центров подобия трех попарно неравных окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, располагаются по три на четырех прямых (черт. 107).

Даны попарно неравные окружности O_1, O_2 и O_3 , причем центры их не лежат на одной прямой. Построим внеш-

ние и внутренние центры подобия для каждой пары окружностей, обозначая их буквами S и J с соответствующими индексами.

Пусть гомотетия φ_1 отображает окружность O_1 в окружность O_2 , а гомотетия φ_2 — окружность O_2 в окруж-



Черт. 107

ность O_3 . Тогда гомотетия $\varphi = \varphi_2 \varphi_1$ отобразит окружность O_1 в окружность O_3 . Возможны четыре случая:

1. $k_1 > 0, k_2 > 0, k = k_2 k_1 > 0$. По доказанной теореме центр S_{13} гомотетии φ и центры S_{12} и S_{23} гомотетий φ_1 и φ_2 лежат на одной прямой.

2. $k_1 > 0, k_2 < 0, k < 0$. Центрами гомотетий φ, φ_1 и φ_2 явятся теперь точки J_{13}, S_{12} и J_{23} , которые по доказанному лежат на одной прямой.

3. $k_1 < 0, k_2 > 0, k < 0$. Теперь центрами указанных гомотетий являются точки J_{13}, J_{12} и S_{23} .

4. $k_1 < 0, k_2 < 0, k > 0$. Центрами гомотетий в этом случае будут точки S_{13}, J_{12} и J_{23} .

§ 39. Преобразование подобия на плоскости

Преобразованием подобия назовем произведение гомотетии на движение.

Пусть φ — гомотетия с центром S и коэффициентом k , f — движение. Преобразование $\psi = f \varphi$ мы назвали

преобразованием подобия. Возможны следующие частные случаи:

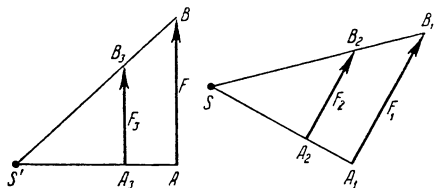
1. $\varphi = f = f_0$ — тождественное преобразование. В этом случае ψ является тоже тождественным преобразованием.

2. $\varphi = f_0$ — тождественное движение. Тогда $\psi = f$, т. е. движение является частным случаем преобразования подобия.

3. $f = f_0$ — тождественное движение. Тогда $\psi = \varphi$, т. е. гомотетия является тоже частным случаем преобразования подобия.

Т е о р е м а. *Произведение движения на гомотетию есть преобразование подобия.*

Мы должны доказать, что преобразование φf является преобразованием подобия. Рассмотрим для этого некоторую фигуру F (черт. 108). Движение f отображает ее в равную



Черт. 108

ей фигуру F_1 , а гомотетия φ отображает F_1 в некоторую фигуру F_2 .

Рассмотрим движение f^{-1} , обратное движению f . При этом движении F_1 отобразится в F , точка S — в точку S' , а фигура F_2 — в фигуру F_3 . Очевидно, что фигура F_3 гомотетична фигуре F относительно центра S' , так как фигура Φ , являющаяся соединением фигур F_1, F_2 и точки S , равна фигуре Φ' , которая представляет соединение фигур F, F_3 и точки S' . Обозначим гомотетию, отображающую F в F_3 , через φ' . Коэффициент гомотетии φ' будет равен коэффициенту гомотетии φ . Рассмотрим теперь преобразование подобия $f\varphi'$. При этом преобразовании фигура F отобразится сначала в фигуру F_3 , а затем фигура F_3 в фигуру F_2 . В результате фигура F отобразится в ту же фигуру F_2 , что и при преобразовании φf . Итак,

$$\varphi f = f\varphi',$$

что и требовалось установить.

С л е д с т в и е. Произведение гомотетии φ' с центром S' на движение f (т. е. преобразование $f\varphi'$) можно представить как произведение этого же движения на гомотетию φ с тем же коэффициентом и центром в точке S , в которую отображается S' при данном движении (преобразование φf).

В дальнейшем мы будем рассматривать произведение нескольких гомотетий и движений. Повторяя почти буквально рассуждения, приведенные в § 19 при доказательстве теоремы о свойстве сочетательности произведения движений, мы установим, что произведение нескольких гомотетий и движений тоже обладает свойством сочетательности. Этим мы воспользуемся в последующих рассуждениях.

Т е о р е м а. Произведение двух преобразований подобия есть преобразование подобия.

Пусть даны два преобразования подобия: $\psi_1 = f_1 \varphi_1$ и $\psi_2 = f_2 \varphi_2$. Рассмотрим их произведение:

$$\psi_2 \psi_1 = (f_2 \varphi_2)(f_1 \varphi_1).$$

По предыдущей теореме:

$$\psi_2 = f_2 \varphi_2 = \varphi'_2 f_2.$$

Пользуясь свойством сочетательности произведения движений и гомотетий, получим:

$$\psi_2 \psi_1 = (\varphi'_2 f_2)(f_1 \varphi_1) = \varphi'_2 (f_2 f_1) \varphi_1.$$

Произведение движений $f_2 f_1$ есть некоторое движение f . Так как $f\varphi_1 = \varphi'_1 f$, то, далее, получим:

$$\psi_2 \psi_1 = \varphi'_2 (f\varphi_1) = \varphi'_2 (\varphi'_1 f) = (\varphi'_2 \varphi'_1) f.$$

Как показано в § 38, произведение гомотетий $\varphi'_2 \varphi'_1$ есть или гомотетия, или движение. Следовательно, $\psi_2 \psi_1$ равно или произведению гомотетии на движение, или двух движений. И в том и в другом случае это будет преобразование подобия. Теорема доказана.

Пусть дано преобразование подобия $\psi = f\varphi$. Рассмотрим другое преобразование подобия $\psi^{-1} = \varphi^{-1} f^{-1}$ и найдем их произведение:

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \psi &= (\varphi^{-1} f^{-1})(f\varphi) = \varphi^{-1} (f^{-1} f) \varphi = \varphi^{-1} f_0 \varphi = \\ &= \varphi^{-1} \varphi = f_0, \end{aligned}$$

где f_0 — тождественное преобразование. Легко убедиться также, что

$$\psi \psi^{-1} = f_0,$$

т. е. ψ и ψ^{-1} являются преобразованиями, обратными друг другу.

Рассмотрим множество всех преобразований подобия на плоскости. В это множество входят:

- 1) произведение двух любых преобразований данного множества;
- 2) тождественное преобразование f_0 ;
- 3) преобразование ψ^{-1} , обратное произвольному преобразованию данного множества.

Кроме того, произведение преобразований подобия обладает свойством сочетательности.

В соответствии с общим определением группы мы можем сказать, что множество всех преобразований подобия на плоскости образует группу (группа подобий). Так как движения на плоскости являются частным случаем преобразования подобия, то группа всех движений на плоскости является подгруппой группы подобия.

§ 40. Подобие фигур на плоскости

Фигура F' называется подобной фигуре F , если существует преобразование подобия, отображающее фигуру F в фигуру F' . Подобие фигур обозначается знаком « \sim ». Следовательно, если существует преобразование подобия ψ , при котором $F' = \psi(F)$, то $F' \sim F$.

Подобие фигур обладает следующими свойствами:

1. *Если $F' \sim F$, то $F \sim F'$ (что следует из существования преобразования подобия ψ^{-1} , обратного ψ).*

2. *Равные фигуры подобны (так как движение есть частный случай преобразования подобия).*

3. *Гомотетичные фигуры подобны (так как гомотетия есть частный случай преобразования подобия).*

4. *Если $F_2 \sim F_1$ и $F_3 \sim F_2$, то $F_3 \sim F_1$ (так как произведение подобий есть подобие).*

5. *В подобных фигурах соответственные отрезки пропорциональны, а соответственные углы равны (так как указанным свойством обладают гомотетичные фигуры, а при движении сохраняется равенство соответственных отрезков и углов).*

6. *Фигуры F_1 и F_2 подобны, если существует третья фигура F_3 , гомотетичная одной из них и равная другой. (Если существует гомотетия φ , при которой $F_3 = \varphi(F_1)$ и движение f , при котором $F_2 = f(F_3)$, то преобразование $f \circ \varphi$ отображает F_1 в F_2).*

Теорема. Если между точками двух плоских фигур F_1 и F_2 можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором отношение отрезка, соединяющего какие-либо две точки фигуры F_2 , к отрезку, соединяющему соответственные им точки фигуры F_1 , имеет одно и то же значение для всех точек данных фигур, то $F_2 \sim F_1$.

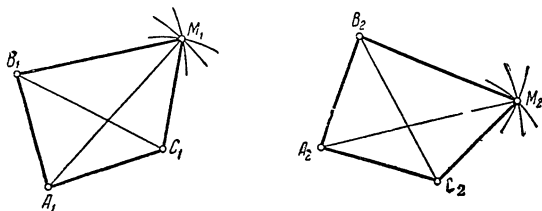
Обозначим это постоянное отношение через k . По условию

$$\frac{M_2 N_2}{M_1 N_1} = k,$$

где M_2 и N_2 — произвольные точки фигуры F_2 , а M_1 и N_1 — соответственные им точки фигуры F_1 .

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 1$, т. е. когда все соответственные отрезки равны, и докажем, что фигуры F_1 и F_2 при этом условии будут равны.

При доказательстве будем опираться на следующее очевидное предложение: три окружности, центры которых не лежат на одной прямой, могут иметь только одну общую точку (если бы три окружности имели две общие точки A и B , то их центры принадлежали бы геометрическому месту точек, равноудаленных от точек A и B , т. е. прямой).



Черт. 109

Пусть A_1 , B_1 и C_1 — три точки фигуры F_1 , не лежащие на одной прямой, а A_2 , B_2 и C_2 — соответственные им точки фигуры F_2 (черт. 109). Возьмем произвольную точку M_1 фигуры F_1 , ей будет соответствовать точка M_2 фигуры F_2 . По условию все отрезки, соединяющие точки A_1 , B_1 , C_1 и M_1 первой фигуры, равны отрезкам, соединяющим соответствующие им точки A_2 , B_2 , C_2 и M_2 второй фигуры. Так как $\triangle A_1 B_1 C_1 = \triangle A_2 B_2 C_2$, то существует движение f , отображающее первый треугольник во второй. При этом движении окружности, имеющие центры в точках A_1 , B_1 , C_1 и проходящие через точку M_1 , отобразятся в равные им окружности с центрами в точках A_2 , B_2 , C_2 . Эти последние три окружности пересекутся в точке M_2 . Так как

центры этих окружностей не лежат на одной прямой, то они могут иметь только одну общую точку. Поэтому при движении f точка M_1 отобразится в точку M_2 . Итак, при движении f все точки фигуры F_1 отобразятся в соответствующие им точки фигуры F_2 . Следовательно, $F_2 = F_1$.

Пусть теперь $k \neq 1$. Зададим гомотетию φ с произвольным центром и с коэффициентом k . Фигура F_1 отобразится в фигуру F'_1 , а произвольные точки ее M_1 и N_1 — в точки M'_1 и N'_1 , причем

$$\frac{M'_1 N'_1}{M_1 N_1} = k.$$

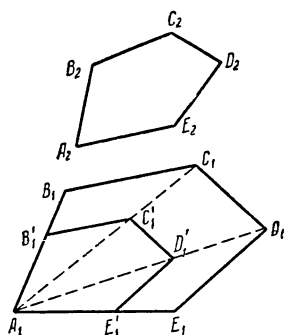
Отсюда следует, что $M_2 N_2 = M'_1 N'_1$.

Между точками фигур F'_1 и F_2 , очевидно, можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором точкам M'_1 и N'_1 соответствуют точки M_2 и N_2 . По доказанному существует движение f , отображающее фигуру F'_1 в фигуру F_2 . Отсюда следует, что преобразование подобия $f \circ$ отображает фигуру F_1 в фигуру F_2 , т. е. $F_2 \sim F_1$.

Т е о р е м а. Два одноименных многоугольника подобны, если между их вершинами можно установить соответствие, при котором сходственные стороны этих многоугольников будут пропорциональны, а соответственные углы равны.

Пусть даны такие многоугольники $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ и $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2$ (черт. 110), причем $\frac{A_2 B_2}{A_1 B_1} = \frac{B_2 C_2}{B_1 C_1} = \dots = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} = k$;

$$\angle A_1 = \angle A_2, \angle B_1 = \angle B_2, \dots, \angle E_1 = \angle E_2.$$



Черт. 110

Возьмем гомотетию с центром в вершине A_1 и коэффициентом k . Эта гомотетия отобразит многоугольник $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ в многоугольник $A_1 B'_1 C'_1 D'_1 E'_1$, который, как легко видеть, равен многоугольнику $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2$ (вследствие равенства соответственных сторон и углов). В силу свойства 6 данные многоугольники подобны.

Доказательства признаков подобия треугольников прово-

бывают по тому же плану: строится третий треугольник, равный одному из них и гомотетичный другому. Доказательство этих признаков и теоремы, вытекающие из них, будем считать известными из школьного курса.

Гомотетия не меняет ориентации углов на плоскости (§ 35). Следовательно, преобразование подобия f не меняет ориентацию углов на плоскости, если f — движение первого рода, и меняет ориентацию углов на противоположную, если f — движение второго рода (§ 27).

В соответствии с этим мы можем говорить о подобии фигур первого рода и второго рода.

§ 41. Метод подобия

В подобных фигурах соответственные углы и отношения соответственных отрезков равны между собой. Положим, что нам требуется построить некоторую фигуру по данным углам и отношениям отрезков, связанных с этой фигурой. Пусть такая фигура F построена. Тогда всякая фигура F' , подобная фигуре F , будет также отвечать условиям задачи. Мы скажем, что фигура F является искомой с точностью до подобия.

Пусть искомая фигура определена условиями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Может оказаться возможным построить фигуру F , подобную искомой, по условиям $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тогда из совокупности фигур, подобных F , мы должны выбрать фигуру F_0 , удовлетворяющую условию α_1 . Решение задачи разбилось на два этапа: сначала по условиям $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ мы строим фигуру F , являющуюся искомой с точностью до подобия, затем строим фигуру F_0 , подобную F и удовлетворяющую условию α_1 .

Такой метод решения задач на построение называется *методом подобия*. Отметим следующие варианты этого метода.

1. Условие α_1 выражает равенство некоторого отрезка, связанного с искомой фигурой определенным образом, данному отрезку P . Построив фигуру F , мы строим затем отрезок Q , связанный с ней указанным образом. После этого строим искомую фигуру F_0 , как подобную фигуре F при коэффициенте подобия $k = \frac{P}{Q}$.

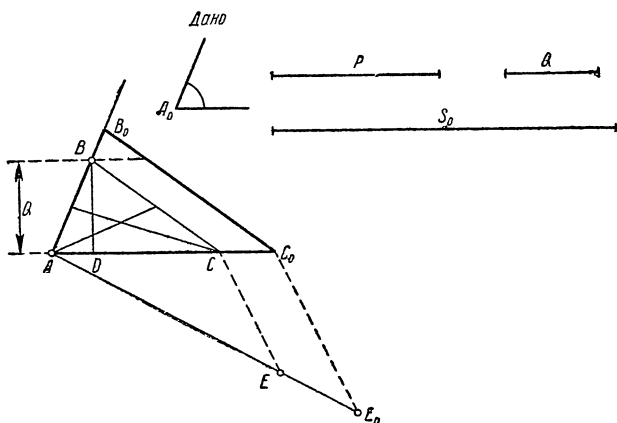
2. Условие α_1 выражает принадлежность некоторых точек искомой фигуры F_0 данной фигуре Φ . В этом слу-

чае надо построить фигуру F , гомотетичную искомой фигуре. Затем, пользуясь центром гомотетии и условием α_1 , из фигур, гомотетичных F , выбираем искомую.

Приведем примеры задач обоих типов.

Задача 1. Построить треугольник по углу при основании и сумме двух медиан, проведенных к боковым сторонам, при условии, что отношение основания к высоте равно отношению данных отрезков P и Q .

Решение. Строим $\triangle ABC$ по основанию $AC = P$, высоте $BD = Q$ и данному $\angle BAC$ (построение показано на чертеже 111). Построенный треугольник дает решение задачи с точностью до подобия.



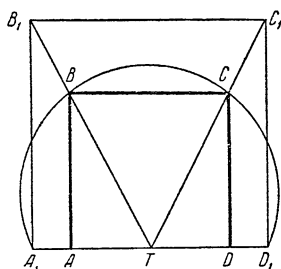
Черт. 111

Пусть сумма медиан задана отрезком S_0 . Строим сумму S медиан $\triangle ABC$, проведенных из вершин A и C . Чтобы построить искомый треугольник F_0 , подвергнем $\triangle ABC$ гомотетии с центром в вершине A и с коэффициентом $k = \frac{S_0}{S}$. Гомотетию при этом зададим парой соответственных точек E и E_0 так, что $AE = S$, а $AE_0 = S_0$. Полученный $\triangle AB_0C_0$ будет искомым. Детали построения показаны на чертеже ($C_0E_0 \parallel CE$, $C_0B_0 \parallel CB$).

Заметим, что в качестве центра гомотетии можно взять любую точку плоскости. Выбор в качестве центра вершины треугольника A упрощает построение.

Задача 2. В данный сегмент вписать квадрат $ABCD$ так, чтобы вершины его A и D лежали на хорде, а вершины B и C на дуге этого сегмента.

Анализ. Пусть $ABCD$ — искомый квадрат (черт. 112). Построим на хорде A_1D_1 квадрат $A_1B_1C_1D_1$, расположенный по одну сторону с данным сегментом от прямой A_1D_1 . Пусть T — середина хорды A_1D_1 , а следовательно, и отрезка AD . Поэтому гомотетия с центром T и коэффициентом $k = \frac{TA}{TA_1}$ отображает квадрат $A_1B_1C_1D_1$ в квадрат $ABCD$.



Черт. 112

Построение начинаем с квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Вершины искомого квадрата B и C определяются как точки пересечения дуги сегмента с отрезками, соединяющими точки B_1 и C_1 с серединой T хорды A_1D_1 (доказательство следует из свойств гомотетии).

Если точки B_1 и C_1 не находятся внутри сегмента, то задача имеет единственное решение.

Точки B_1 и C_1 будут находиться внутри сегмента, если его дуга превышает $\frac{3}{4}$ всей окружности. В этом случае задача не имеет решения.

ГЛАВА VI

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ОКРУЖНОСТЕЙ

§ 42. Степень точки относительно окружности

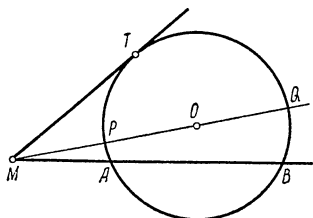
Если через точку M (черт. 113 а, 113 б) провести прямую, пересекающую окружность O в точках A и B , то произведение $MA \cdot MB$, как известно из школьного курса, не зависит от выбора секущей MA . Если точка M лежит вне окружности, то

$$MA \cdot MB = MT^2,$$

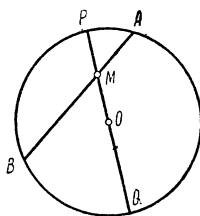
где MT — отрезок касательной, проведенной из точки M (от точки M до точки касания).

Напомним, что в данном равенстве под MA , MB и MT подразумеваются длины соответствующих отрезков. Оно является упрощенной записью следующего равенства:

$$\rho(MA) \cdot \rho(MB) = [\rho(MT)]^2.$$



Черт. 113 а



Черт. 113 б

В данной главе будем и дальше пользоваться подобного рода упрощенной записью.

Проведем через точку M секущую, проходящую через центр окружности O . Пусть P и Q — точки пересечения секущей с окружностью, причем $MP \leq MQ$. Если точка M лежит вне окружности, то

$$MA \cdot MB = MP \cdot MQ = (MO - R)(MO + R) = MO^2 - R^2,$$

где R — радиус окружности.

Если же точка M лежит внутри окружности, то

$$MA \cdot MB = MP \cdot MQ = (R - MO)(R + MO) = R^2 - MO^2.$$

Степенью точки M относительно окружности O (R) назовем число $MO^2 - R^2$.

Если через точку M провести к данной окружности секущую, то произведение длин отрезков ее от точки M до точек пересечения с окружностью равно абсолютной величине этого числа.

Для трех возможных случаев расположения точки M :

$$MO > R, \quad MO < R \quad \text{и} \quad MO = R,$$

степень ее относительно окружности будет соответственно положительной, отрицательной и равной нулю.

Если точка M лежит вне окружности, то степень ее относительно этой окружности равна квадрату длины отрезка касательной, проведенной из точки M (считая от точки M до точки касания).

Часто бывает выгодно рассматривать точку как окружность нулевого радиуса (нулевая окружность). Тогда степень точки M относительно нулевой окружности O (т. е. точки O) равна MO^2 .

§ 43. Радикальная ось

Рассмотрим две окружности $O_1 (R_1)$ и $O_2 (R_2)$. Для определенности считаем, что $R_1 \geq R_2$. Поставим задачу отыскать те точки плоскости, каждая из которых имеет одинаковые степени относительно данных окружностей.

Если $R_1 \neq R_2$ и окружности O_1 и O_2 концентрические (центры O_1 и O_2 совпадают), то для любой точки M

$$MO_1^2 - R_1^2 \neq MO_2^2 - R_2^2.$$

Следовательно, в этом случае нет точек, имеющих одинаковые степени относительно данных окружностей.

Будем в дальнейшем считать, что окружности O_1 и O_2 не являются концентрическими.

Возьмем прямую AB , перпендикулярную линии центров. Пусть M — произвольная точка прямой AB , M_0 — точка пересечения прямой AB с линией центров (черт. 114). Найдем разность степеней точки M относительно окружностей O_1 и O_2 :

$$t = (MO_1^2 - R_1^2) - (MO_2^2 - R_2^2).$$

Но

$$MO_1^2 = M_0O_1^2 + M_0M^2,$$

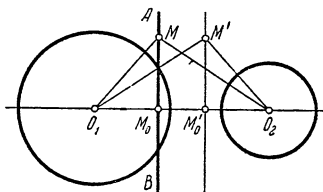
$$MO_2^2 = M_0O_2^2 + M_0M^2.$$

Отсюда после упрощений получим:

$$t = (M_0O_1^2 - R_1^2) - (M_0O_2^2 - R_2^2).$$

Разность степеней любой точки прямой AB относительно окружностей O_1 и O_2 равна разности степеней точки M_0 относительно этих окружностей.

Обозначим расстояние O_1M_0 через x , причем будем считать $x > 0$, если M_0 и O_2 лежат на линии центров по одну сторону от точки O_1 и $x < 0$, если эти точки лежат по разные стороны от точки O_1 . Тогда положение точки M_0 на



Черт. 114

линии центров вполне определено для каждого значения x . Легко видеть, что при любом положении

$$O_2 M_0 = |O_1 O_2 - x| = |d - x|.$$

Выразим разность степеней точки M_0 (а значит, и разность степеней любой точки M на прямой AB) через x :

$$t = (x^2 - R_1^2) - [(d - x)^2 - R_2^2] = 2dx - [d^2 + (R_1^2 - R_2^2)].$$

Таким образом, t — линейная функция x . Следовательно, разным точкам линии центров соответствуют разные значения t . Если мы возьмем определенное значение t , то на линии центров существует единственная точка, разность степеней которой относительно окружностей O_1 и O_2 равна t . Расстояние ее от центра O_1 будет равно:

$$x = \frac{d^2 + (R_1^2 - R_2^2) + t}{2d}.$$

Возьмем теперь точку M' , не лежащую на прямой AB . Пусть M'_0 — основание перпендикуляра, опущенного из M' на линию центров. По доказанному разности степеней точек M' и M'_0 относительно окружностей O_1 и O_2 одинаковы. Так как M'_0 отлично от M_0 , то, следовательно, разность степеней точки M' относительно данных окружностей отлична от t .

Таким образом, мы приходим к следующему геометрическому месту точек:

Геометрическое место точек, разность степеней каждой из которых относительно двух данных неконцентрических окружностей имеет одно и то же значение, есть прямая, перпендикулярная линии центров.

Особый интерес представляет случай, когда $t = 0$. В этом случае степени каждой точки данного геометрического места относительно данных окружностей равны.

Геометрическое место точек, каждая из которых имеет равные степени относительно двух данных концентрических окружностей, есть прямая, перпендикулярная линии центров.

Данная прямая называется *радикальной осью* двух окружностей.

Расстояние радикальной оси от центра окружности O будет равно

$$x = \frac{d_2 + (R_1^2 - R_2^2)}{2d}.$$

Так как $R_1 \geq R_2$, то $x \geq 0$. Следовательно, точка пе-

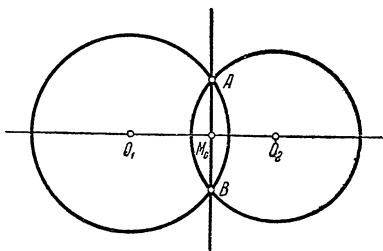
ресекается радикальной оси с линией центров и центр окружности O_2 лежат по одну сторону от центра окружности O_1 .

Рассмотрим отдельные случаи расположения окружностей (§ 11).

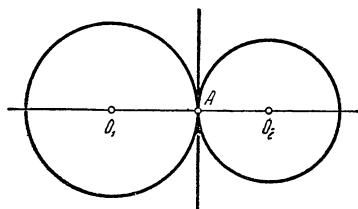
1. $R_1 + R_2 > d > R_1 - R_2$, окружности O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (черт. 115).

Так как степени точки A относительно обеих окружностей равны между собой (каждая из них равна нулю), то A — точка радикальной оси. То же справедливо относительно точки B . Радикальной осью окружностей O_1 и O_2 является прямая AB .

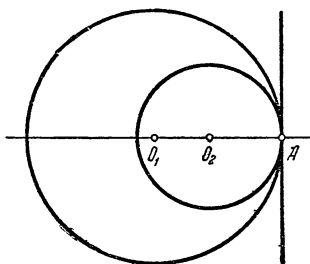
2. $d = R_1 + R_2$ или $d = R_1 - R_2$, окружности O_1 и O_2 касаются в точке A (черт. 116 а, 116 б).



Черт. 115

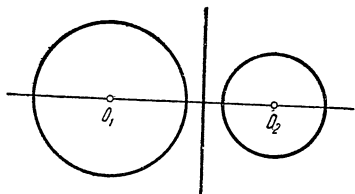


Черт. 116 а

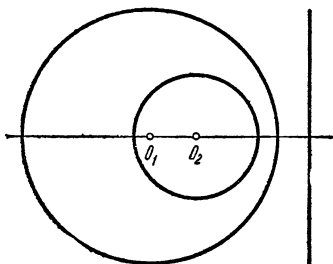


Черт. 116 б

Радикальной осью окружностей O_1 и O_2 является их общая касательная, проходящая через точку A .



Черт. 117



Черт. 118

3. $d > R_1 + R_2$ (черт. 117), одна окружность находится вне другой.

Радикальная ось не может пересекать одну из окружностей, так как степень точки пересечения оси с окружностью относительно первой окружности была бы равна нулю, а относительно второй окружности была бы положительной.

Так как в этом случае

$$d^2 > R_1^2 - R_2^2,$$

то

$$x = \frac{d^2 + (R_1^2 - R_2^2)}{2d} < \frac{d^2 + d^2}{2d} = d.$$

Следовательно, радикальная ось окружностей O_1 и O_2 пересечет линию центров в точке, лежащей между центрами O_1 и O_2 , и пройдет вне окружностей.

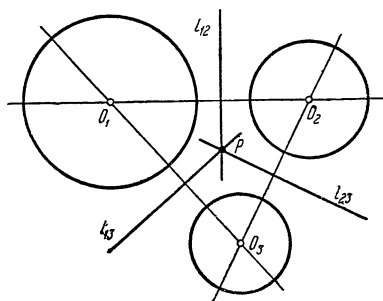
Построение радикальной оси для этого случая будет показано в следующем параграфе.

4. $d < R_1 - R_2$ (черт. 118), окружность O_2 лежит внутри окружности O_1 .

Повторяя приведенные выше рассуждения, приходим к выводу, что радикальная ось не пересекает данных окружностей. Она пройдет целиком вне окружностей O_1 и O_2 .

§ 44. Радикальный центр

Возьмем три окружности O_1 , O_2 и O_3 , центры которых не лежат на одной прямой (черт. 119). Пусть l_{ij} — радикальная ось окружностей O_i и O_j ($i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$).



Черт. 119

Так как точки O_1 , O_2 и O_3 не лежат на одной прямой, то радикальные оси l_{12} и l_{23} пересекутся в некоторой точке P . Степени точки P относительно окружностей O_1 и O_2 одинаковы, так как она лежит на радикальной оси этих окружностей. По такой же причине одинаковы степени этой точки относительно

окружностей O_2 и O_3 . Итак, степени точки P относительно трех данных окружностей одинаковы. Следовательно, эта точка лежит также на радикальной оси l_{13} . Мы пришли к следующему выводу:

Если центры трех окружностей не лежат на одной прямой, то существует единственная точка плоскости, степени которой относительно этих окружностей одинаковы.

Эта точка называется *радикальным центром* трех данных окружностей.

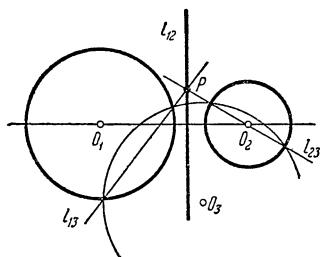
Через радикальный центр трех окружностей проходит радикальная ось любой пары этих окружностей.

З а д а ч а. Построить радикальную ось двух пересекающихся окружностей O_1 и O_2 (черт. 120).

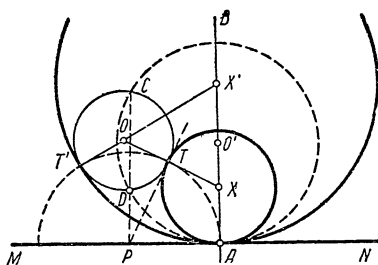
Возьмем окружность O_3 , пересекающую окружности O_1 и O_2 . Центр ее выберем так, чтобы он не лежал на прямой O_1O_2 . Строим затем радикальные оси l_{13} и l_{23} . Через точку пересечения P (радикальный центр) пройдет искомая радикальная ось l_{12} . Таким же путем можно получить другую точку оси l_{12} .

З а д а ч а. Построить окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

Дано: прямая MN , точка A на ней и окружность O (черт. 121).



Черт. 120



Черт. 121

Требуется построить окружность X , касающуюся окружности O и прямой MN в точке A .

А н а л и з. Пусть X — искомая окружность. Центр ее X лежит на прямой XA , перпендикулярной данной прямой MN . Возьмем произвольную окружность O' , касающуюся прямой MN в точке A , и построим радикальную ось CD окружностей O и O' . Так как прямая MN является ради-

кальной осью окружностей O' и X , то точка пересечения прямых MN и CD (точка P) является радикальным центром окружностей O , O' и X . Пусть T — точка касания окружностей O и X . Общая касательная этих окружностей, проходящая через точку T , является их радикальной осью и проходит через точку P .

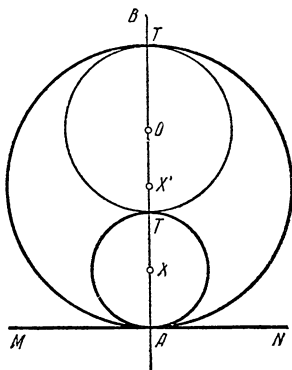
П о с т р о е н и е. Проводим прямую AB , перпендикулярную прямой MN , на ней берем произвольную точку O' и проводим радиусом $O'A$ окружность с центром в этой точке. Строим радикальную ось окружностей O и O' (для этого удобно взять окружность O'' такой, чтобы она пересекала окружность O) и строим точку P , в которой она пересекается с прямой MN . Далее, строим окружность радиусом PA из центра P и точки пересечения T и T' ее с окружностью O . Проводим прямую OT и строим точку X , в которой она пересекается прямой AB . Наконец, строим окружность с центром X и радиусом XA . Эта окружность является искомой.

Аналогичное построение, проведенное для точки T' , дает вторую окружность, которая также даст решение задачи (окружность X').

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как прямая MN является радикальной осью окружностей X и O' , то P — радикальный центр окружностей O , X и O' . Степень его относительно каждой из этих окружностей равна PA^2 . Точка P лежит вне окружностей O' и X . Значит, эта точка лежит также вне окружности O . Степень P относительно окружности O равна PT^2 (так как $PT=PA$). Отсюда следует, что PT — касательная к окружности O в точке T . Прямоугольные треугольники PTX и PAX равны, так как имеют общую гипотенузу PX и равные катеты PT и PA . Отсюда $XT = XA$. Значит, окружность X проходит через точку T , которая лежит на линии центров OX , и поэтому окружности O и X касаются в этой точке. Кроме того, из построения следует, что окружность X касается прямой MN в точке A . Итак, X — искомая окружность.

И с с л е д о в а н и е. Если центр окружности O не лежит на прямой AB , то радикальная ось окружностей O и O' пересекает прямую MN в некоторой точке P , которая лежит вне окружности O' и поэтому также вне окружности O . Следовательно, из точки P всегда можно провести касательные PT и PT' к окружности O . Если окружность O при этом не касается прямой MN , то имеем два решения — ок-

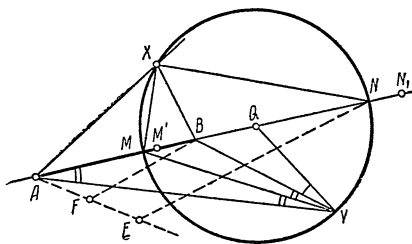
Если центр окружности O лежит на прямой AB и окружность O не касается прямой MN , то радикальная ось окружностей O и O' параллельна MN и данное построение не применимо (черт. 122). В этом случае имеем два решения — окружности, диаметрами которых являются отрезки прямой AB от точки A до точек пересечения этой прямой с данной окружностью O .



Если окружность O касается прямой MN в точке A , то решений будет бесконечное множество. Любая окружность, касающаяся A , отвечает условиям задачи.

Возьмем на отрезке AB точку M (черт. 123). Ею отрезок AB разделится на две части в отношении $AM : BM$. На прямой AB найдем такую точку N , лежащую вне отрезка AB , чтобы

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM} = \lambda.$$



Для построения точки N проведем под некоторым углом к AB прямую AE , на которой отложим отрезок $AE = AM$ и отрезок $EF = BM$, так, чтобы точки F и A лежали по одну сторону от точки E .

Проведем прямую BF и через точку E — прямую, параллельную BF . Пусть вторая прямая пересечет AB в точке N . Тогда

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AE}{EF} = \frac{AM}{BM}.$$

Следовательно, точка N — искомая.

Будем говорить, что точка M делит отрезок AB внутренним образом, а точка N делит этот же отрезок внешним образом в одном и том же отношении.

Если $AM > BM$, то $AN > BN$ и точка B лежит между точками A и N . При $AM < BM$, как легко видеть, точка A лежит между точками B и N . Если же $AM = BM$, то, очевидно, точка N не существует.

При изменении положения точки M на отрезке AB один из отрезков AM и BM увеличивается, а другой уменьшается, вместе с этим изменяется и отношение этих отрезков. Отсюда следует, что на отрезке AB существует единственная точка M , которая делит его внутренним образом в данном отношении λ .

Докажем теперь, что вне отрезка AB существует единственная точка N , которая делит его внешним образом в том же отношении λ . Пусть N' — какая-либо точка луча BN . Тогда имеем:

$$AN' = AN \pm NN', \quad BN' = BN \pm NN';$$

$$\frac{AN'}{BN'} = \frac{AN \pm NN'}{BN \pm NN'} = \frac{AN}{BN} \cdot \frac{1 \pm \frac{NN'}{AN}}{1 \pm \frac{NN'}{BN}}.$$

Так как $AN > BN$, то

$$1 \pm \frac{NN'}{AN} \neq 1 \pm \frac{NN'}{BN},$$

и поэтому

$$\frac{AN'}{BN'} \neq \frac{AN}{BN},$$

т. е.

$$\frac{AN'}{BN'} \neq \lambda.$$

Если точки M и N делят отрезок AB одна внутренним, а другая внешним образом в одном и том же отношении, то говорят, что пара точек M , N гармонически сопряжена с парой точек A и B .

Из равенства (*) следует, что

$$\frac{MB}{NB} = \frac{MA}{AN},$$

т. е. точки B и A делят отрезок MN одна внутренним, а другая внешним образом в одном и том же отношении. Это значит, что пара точек A и B в свою очередь гармонически сопряжена с парой точек M и N .

Рассмотрим теперь геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний которых от концов отрезка AB одинаково и равно λ .

На прямой AB к этому геометрическому месту принадлежат точки M и N и только они. Пусть X — произвольная точка искомого геометрического места, отличная от точек M и N (черт. 123). Соединим ее с точками A , B , M и N . По предположению

$$\frac{AX}{BX} = \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN} = \lambda.$$

Пусть биссектрисы внутреннего и внешнего углов с вершиной X треугольника AXB пересекают сторону его AB и продолжение ее соответственно в точках M' и N' . Тогда по свойству этих биссектрис:

$$\frac{AM'}{BM'} = \frac{AN'}{BN'} = \frac{AX}{BX} = \lambda.$$

Точки M' и N' делят внутренним и внешним образом отрезок AB в том же отношении λ . Следовательно, они совпадают с точками M и N .

Мы доказали, что XM и XN — внутренняя и внешняя биссектрисы $\triangle AXB$. Как известно, биссектрисы смежных углов образуют прямой угол. Значит, $\angle MXN$ — прямой. Поэтому точка искомого геометрического места X (если она существует) лежит на окружности, для которой отрезок MN служит диаметром.

Докажем обратное предложение: всякая точка указанной окружности принадлежит искомому геометрическому месту.

Пусть Q — центр этой окружности, а R — ее радиус. Так как $AN > AM$, то $BN > BM$. Следовательно, центр Q лежит между точками B и N . Поэтому

$$\begin{aligned} AM &= QA - R, & BM &= R - QB, \\ AN &= QA + R, & BN &= R + QB. \end{aligned}$$

Из пропорции

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$$

находим:

$$\frac{QA + R}{R + QB} = \frac{QA - R}{R - QB}.$$

Отсюда получим:

$$QA \cdot QB = R^2.$$

Возьмем произвольную точку окружности Y и соединим ее с точками A , B , M и Q . Тогда

$$QA \cdot QB = QY^2,$$

$$\frac{QA}{QY} = \frac{QY}{QB}.$$

Следовательно, $\triangle QYA \sim \triangle QYB$ и поэтому $\angle QAY = \angle QYB$.

Далее получим:

$$\angle AYM = \angle QMY - \angle QAY,$$

$$\angle BYM = \angle QYM - \angle QYB.$$

Отсюда:

$$\angle AYM = \angle BYM,$$

т. е. YM — биссектриса $\triangle AYB$. Поэтому

$$\frac{AY}{BY} = \frac{AM}{BM} = \lambda.$$

Этим доказана следующая теорема.

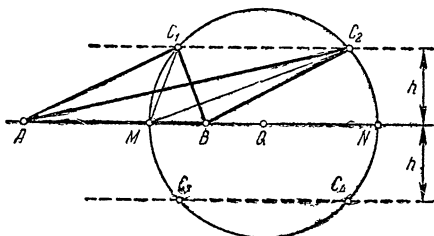
Т е о р е м а. *Геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний которых от двух данных точек плоскости A и B постоянно, представляет окружность; диаметром ее является отрезок MN , концы которого M и N делят отрезок AB внутренним и внешним образом в том же отношении.*

Указанная окружность называется окружностью *Аполлония* в честь знаменитого древнегреческого математика *Аполлония* (жил около 200 лет до н. э.).

З а д а ч а. Построить треугольник по основанию $AB = c$, высоте h и точке M на основании, в которой его пересекает биссектриса противолежащего угла C .

Р е ш е н и е (черт. 124). Строим точку N , которая вместе с точкой M даст пару точек, гармонически сопряженную с парой точек A и B . Для этого можно воспользоваться по-

строением, данным в начале параграфа. После этого на отрезке MN , как на диаметре, строим окружность. Это будет окружность Аполлония для отрезка AB . Затем на расстоянии h проводим прямую, параллельную AB . Точ-



Черт. 124

ка пересечения ее с окружностью Аполлония дает вершину искомого треугольника.

Доказательство следует из свойства окружности Аполлония ($AC_1 : BC_1 = AM : BM$). Может быть самое большее четыре решения, которые состоят из двух пар симметричных относительно AB треугольников. Если же $h > \frac{MN}{2}$, то задача решений не имеет.

§ 46. Инверсия

Рассмотрим еще одно точечное преобразование, называемое инверсией.

Инверсией с центром P и коэффициентом k ($k > 0$) называется такое преобразование, при котором любая точка M , отличная от центра P , отображается в точку M' , удовлетворяющую условиям:

- точка M' лежит на луче PM ;
- $PM \cdot PM' = k^2$.

Напомним, что в данном равенстве PM и PM' обозначают длины соответствующих отрезков.

Таким образом, инверсия определена точкой P — центром инверсии, положительным числом k — коэффициент инверсии и отрезком E — единица измерения отрезков.

Из определения инверсии непосредственно вытекают следующие свойства ее.

- Каждой точке M соответствует одна определенная

точка M' , разным точкам M и N соответствуют разные точки M' и N' .

Действительно, условиями а и б вектор $\overrightarrow{PM'}$ полностью определен, точка M' поэтому единственная. При изменении положения точки M на луче, выходящем из центра P , длина PM увеличивается или уменьшается. Соответственно с этим уменьшается или увеличивается длина PM' . При повороте вектора \overrightarrow{PM} поворачивается соответственно вектор $\overrightarrow{PM'}$. Отсюда следует справедливость высказанного предложения.

Таким образом, инверсия представляет взаимно однозначное точечное преобразование (§ 7).

2. Если точке M при инверсии соответствует точка M' , то точке M' при той же инверсии соответствует точка M .

Точки M и M' поэтому называются взаимно обратными или взаимно инверсными.

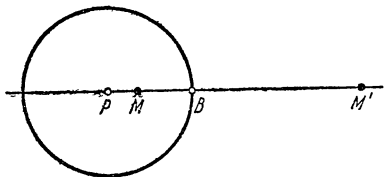
Отсюда следует, что преобразование, обратное данной инверсии, совпадает с этой инверсией.

Выясним геометрический смысл коэффициента инверсии k . Возьмем на луче PM отрезок PB , длина которого равна k . Из условия (б) следует:

$$PM \cdot PM' = PB^2,$$

или

$$\frac{PM}{PB} = \frac{PB}{PM'}.$$



Черт 125

Отрезок PB является средним пропорциональным между отрезками PM и PM' (черт. 125). Найдем точку, инверсную точке B :

$$PB \cdot PB' = PB^2.$$

Отсюда:

$$PB' = PB,$$

т. е. точка B' совпадает с точкой B . Точка B при инверсии отображается сама в себя. Назовем ее *двойной точкой инверсии*.

Если $PM < PB$, то $PM' > PB$, и наоборот. Поэтому

на каждом луче h , выходящем из центра инверсии P , находится единственная двойная точка.

Совокупность двойных точек инверсии образует окружность, называемую *окружностью инверсии*. Центром этой окружности является центр инверсии, а ее радиусом — отрезок PB , длина которого равна k (черт. 125).

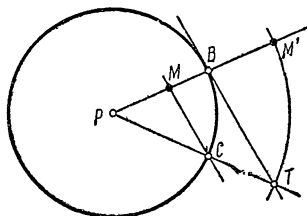
При инверсии окружность инверсии отображается сама в себя. Точке M , лежащей внутри окружности инверсии ($PM < PB$), соответствует точка M' , лежащая вне этой окружности ($PM' > PB$), и наоборот.

Инверсию обычно задают при помощи окружности инверсии. Точка M' , обратная точке M , определяется путем геометрических построений, связанных с пропорцией:

$$\frac{PM}{R} = \frac{R}{PM'},$$

где R — радиус окружности инверсии. Дадим два таких построения.

1. Строим луч PM и точку B , в которой он пересекается с окружностью инверсии (черт. 126). Берем произвольную точку C на окружности инверсии, не лежащую на прямой PM , проводим луч PC и прямую MC . Затем через точку B проводим прямую, параллельную прямой MC , и отмечаем точку пересечения ее с лучом PC (точка T). Тогда:



Черт. 126

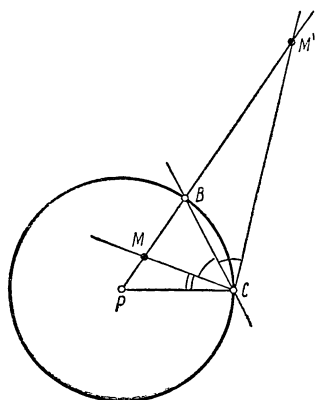
$$\frac{PM}{PB} = \frac{PC}{PT},$$

или

$$\frac{PM}{R} = \frac{R}{PT}.$$

Остается на луче PM построить точку M' так, чтобы $PM' = PT$.

2. После построения точки B берем произвольную точку C на окружности инверсии, проводим прямую CB и луч CM . Затем строим луч CM' , симметричный лучу CM относительно прямой CB (черт. 127). Точка M' , в которой он пересекает луч PM , является искомой.



Черт. 127

Для доказательства рассмотрим треугольники PCM и PCM' . Они имеют общий угол при вершине P . Кроме того, имеем: $\angle PCM = \angle PCB - \angle MCB = \angle PBC - \angle BCM' = \angle PM'C$.

Следовательно,

$$\triangle PCM \sim \triangle PCM'.$$

Отсюда

$$\frac{PM}{PC} = \frac{PC}{PM'}$$

и

$$PM \cdot PM' = PC^2 = R^2.$$

Из подобия треугольников PMS и PCM' следует равенство углов:

$$\angle PMC = \angle PCM'.$$

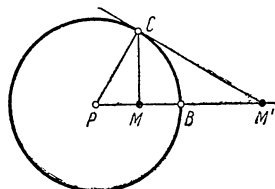
Луч CM' можно построить, исходя из этого условия. Если, в частности, взять точку C так, что $MC \perp PB$, то прямая CM' будет касательной к окружности инверсии (черт. 128).

Если при инверсии фигура F отображается в фигуру Φ , то при той же инверсии фигура Φ отображается в фигуру F . Поэтому фигуры F и Φ называются *взаимно обратными* или *взаимно инверсными*.

Может оказаться, что фигура F при инверсии отображается сама в себя. Будем называть ее в таком случае *инвариантной* фигурой относительно данной инверсии.

Инвариантной фигурой при инверсии является прямая, проходящая через центр инверсии, так как любая точка такой прямой отображается в точку этой же прямой (исключением является центр инверсии, который не имеет обратной точки). Сама окружность инверсии является также инвариантной фигурой.

Т е о р е м а. *Окружность, проходящая через две взаимно обратные точки M и M' , представляет инвариантную фигуру относительно данной инверсии (черт. 129).*

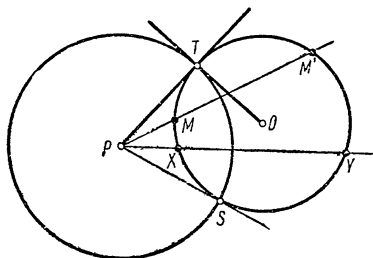


Черт. 128

Проведем из центра инверсии произвольный луч, пересекающий данную окружность в точках X и Y . Тогда (§ 42)

$$PX \cdot PY = PM \cdot PM' = R^2.$$

Следовательно, любая точка X окружности отображается в точку Y этой же окружности. Этим теорема доказана.

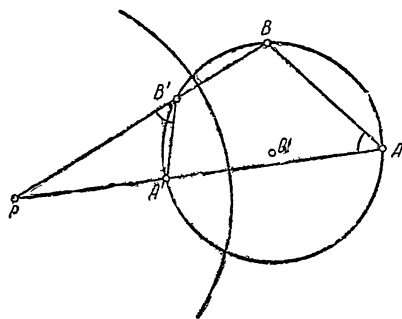


Черт. 129

Пусть T и S — точки пересечения данной окружности с окружностью инверсии. Так как это двойные точки, то лучи PT и PS не имеют с данной окружностью других общих точек, т. е. касаются ее. Отсюда следует перпендикулярность радиусов данной окружности и окружности инверсии, проведенных в точку пересечения этих окружностей. Такие окружности называются *ортогональными*.

Следовательно, окружность, проходящая через две взаимно обратные точки M и M' , ортогональна окружности инверсии.

З а м е ч а н и е. Центр окружности O лежит, очевидно, вне окружности инверсии и отображается в точку O' , лежащую внутри окружности инверсии.



Черт. 130

Пусть A, A' и B, B' — две пары взаимно обратных точек (черт. 130), не лежащие на одной прямой. Проведем

через точки A , A' и B окружность Q . По доказанному точка B' лежит на этой окружности, которая ортогональна окружности инверсии.

Две пары взаимно обратных точек, не лежащих на одной прямой, лежат на окружности, ортогональной к окружности инверсии.

Из условия:

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$$

вытекает, что

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PA'}{PB'}$$

Отсюда следует подобие треугольников APB и $A'PB'$. Поэтому

$$\angle PA'B' = \angle PBA.$$

Этим свойством можно воспользоваться для построения без помощи окружности инверсии точки B' , инверсной точке B , если задана пара взаимно обратных точек A и A' .

Из подобия треугольников PBA и $PA'B'$ получаем:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{PA'}{PB}.$$

Отсюда:

$$A'B' = \frac{PA'}{PB} AB = \frac{PA' \cdot PA}{PA \cdot PB} AB = \frac{R^2}{PA \cdot PB} AB.$$

Если d — расстояние между точками A и B , то расстояние d' между точками A' и B' , инверсными точкам A и B , выражается формулой:

$$d' = \frac{R^2}{PA \cdot PB} d.$$

Легко проверить, что данная формула остается справедливой и в том случае, когда точка B лежит на луче PA .

§ 47. Инверсия прямой и окружности

Пусть дана прямая MN , не проходящая через центр инверсии. Опустим на нее из центра инверсии перпендикуляр PA , построим точку A' , инверсную точке A , и на отрезке PA' , как на диаметре, построим окружность (черт. 131). Проведем, далее, из центра P произвольный луч, пересе-

кающий прямую и полученную окружность соответственно в точках B и B' . Так как $A'B' \perp PB'$, то

$$\triangle PB'A' \sim \triangle PAB.$$

Отсюда:

$$\frac{PA'}{PB} = \frac{PB'}{PA},$$

или

$$PB' \cdot PB = PA' \cdot PA = R^2,$$

т. е. точки B и B' — взаимно обратные. Любой точке B прямой MN соответствует точка B' окружности. Наоборот, любой точке B' окружности, отличной от центра P , соответствует точка B этой прямой.

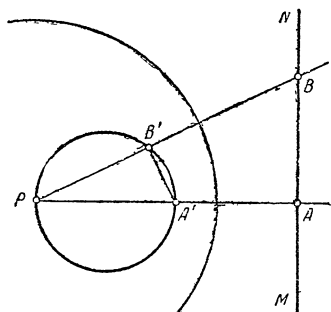
Таким образом, мы доказали следующие теоремы:

1. Прямая, не проходящая через центр инверсии, отображается в окружность, проходящую через центр инверсии.

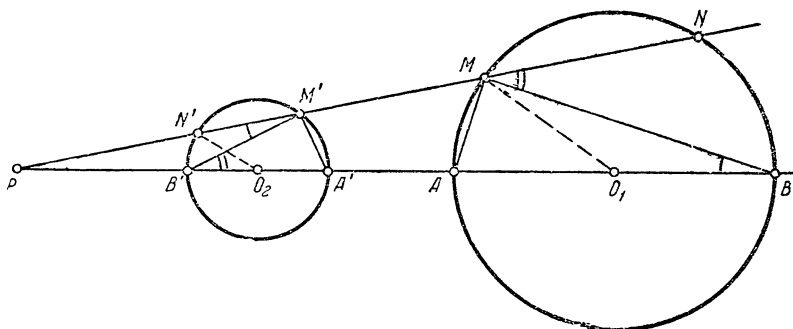
2. Окружность, проходящая через центр инверсии, отображается в прямую, не проходящую через центр инверсии¹⁾.

Рассмотрим теперь инверсию произвольной окружности, не проходящей через центр инверсии.

Т е о р е м а. Окружность, не проходящая через центр инверсии, отображается в окружность, также не проходящую через центр инверсии.



Черт. 131



Черт. 132

¹⁾ При этом мы должны считать, что центр инверсии удален из окружности.

Доказательство. Рассмотрим окружность O_1 , не проходящую через центр инверсии (черт. 132). Пусть прямая PO_1 пересекает окружность O_1 в точках A и B . Построим точки A' и B' , инверсные соответственно точкам A и B , и построим на отрезке $A'B'$, как на диаметре, окружность O_2 . Имеем:

$$PA' \cdot PA = PB' \cdot PB = R^2.$$

Отсюда:

$$\frac{PA'}{PB} = \frac{PB'}{PA}.$$

Зададим гомотетию с центром P и коэффициентом k , где

$$|k| = \frac{PA'}{PB} = \frac{PB'}{PA} = \frac{R^2}{PA \cdot PB}.$$

При этой гомотетии точке A соответствует точка B' , а точке B — точка A' . Значит, окружность O_2 гомотетична окружности O_1 и P — центр их подобия.

Проведем теперь из центра P произвольный луч, пересекающий окружность O_1 в точках M и N . Точки пересечения его с окружностью O_2 обозначим через N' и M' , причем N' обозначает точку, гомотетичную M , и M' — точку, гомотетичную N . Соединим точку M с концами диаметра AB , а точку M' — с концами диаметра $A'B'$. Кроме того, проведем радиусы O_1M и O_2N' . Так как $O_2N' \parallel O_1M$, то

$$\angle PO_2N' = \angle PO_1M.$$

Отсюда следует, что

$$\angle PM'B' = \angle PBM.$$

Из подобия треугольников $PB'M'$ и PMB следует:

$$\frac{PM'}{PB'} = \frac{PB}{PM}.$$

Отсюда:

$$PM' \cdot PM = PB' \cdot PB = R^2,$$

т. е. точки M и M' — взаимно обратные. Таким же путем докажем, что взаимно обратными являются точки N и N' .

Каждой точке M окружности O_1 соответствует инверсная ей точка M' окружности O_2 , и наоборот, каждой точке M' окружности O_2 соответствует инверсная ей точка M окружности O_1 . Следовательно, окружности O_1 и O_2 являются взаимно обратными фигурами. Теорема доказана.

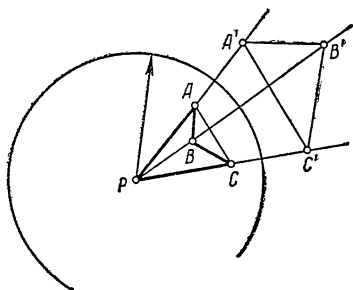
С л е д с т в и е. *Центр инверсии является центром подобия двух взаимно обратных окружностей.*

Заметим, что если центр инверсии лежит вне окружности O_1 и O_2 , то он является внешним центром подобия, а если внутри их, то внутренним.

Отметим также, что центры O_1 и O_2 не являются взаимно обратными точками при инверсии.

З а д а ч а. Доказать, что произведение диагоналей четырехугольника не превышает суммы произведений противоположных сторон его (теорема Птолемея).

Пусть дан четырехугольник $PABC$ (черт. 133). Проведем в нем диагонали PB и AC . Надо доказать, что



Черт. 133

$$PB \cdot AC \leq PA \cdot BC + PC \cdot AB.$$

Для этого возьмем инверсию с центром в вершине P . Пусть точкам A , B и C соответствуют точки A' , B' и C' . Тогда имеем (§ 46):

$$A'B' = \frac{R^2}{PA \cdot PB} AB,$$

$$B'C' = \frac{R^2}{PB \cdot PC} BC,$$

$$A'C' = \frac{R^2}{PA \cdot PC} AC.$$

Так как

$$A'C' \leq A'B + B'C', \text{ то}$$

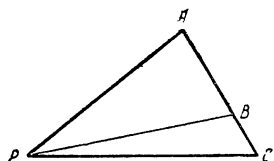
$$\frac{R^2}{PA \cdot PC} AC \leq \frac{R^2}{PA \cdot PB} AB + \frac{R^2}{PB \cdot PC} BC.$$

После сокращения на R^2 и умножения обеих частей неравенства на произведение $PA \cdot PB \cdot PC$ получим:

$$AC \cdot PB \leq PC \cdot AB + PA \cdot BC.$$

Равенство возможно только при условии, если точки A' , B' и C' лежат на одной прямой. Это будет иметь место тогда и только тогда, когда точки P , A , B и C лежат на

одной окружности, так как этой окружности будет соответствовать прямая, на которой будут лежать точки A' , B' и C' . Отсюда вытекает следующее предложение: произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон его.



Черт. 134

В частности, четырехугольник $PABC$ может вырождаться в треугольник PAC , в котором проведен отрезок PB , соединяющий вершину P с точкой B , лежащей на стороне AC (черт. 134). Для этого случая имеем:

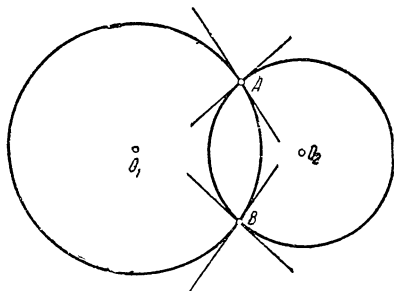
$$PB \cdot AC < PA \cdot BC + PC \cdot AB.$$

Если $AB = BC = \frac{1}{2} AC$, то получим $PB < \frac{1}{2} (PA + PC)$,

т. е. медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон его, проведенных из той же вершины.

§ 48. Основное свойство инверсии

Рассмотрим две пересекающиеся окружности O_1 и O_2 (черт. 135). Через точку их пересечения A проведем к ним касательные. Из образованных при этом углов возьмем тот, который не превышает прямого угла, и назовем его углом между данными окружностями. Будем также говорить, что окружности пересекаются в точке A под построенным таким образом углом. Легко видеть, что в другой общей точке B окружности O_1 и O_2 пересекаются под таким же по величине углом.

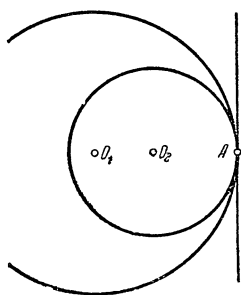


Черт. 135

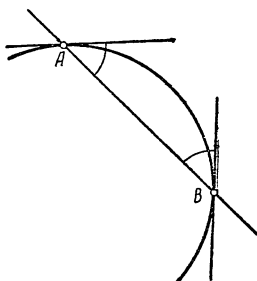
Так как две касающиеся окружности в точке касания имеют общую касательную (две касательные слились в одну прямую), то будем считать, что угол между такими окружностями равен нулю (черт. 136).

Окружности, пересекающиеся под прямым углом, называются *ортогональными*. В § 46 был дан пример таких окружностей.

Углом между окружностью и пересекающей ее прямой назовем тот из углов, образованных данной прямой и касательной к окружности, проведенной через точку их пересечения, который не превышает прямого угла (черт. 137).



Черт. 136

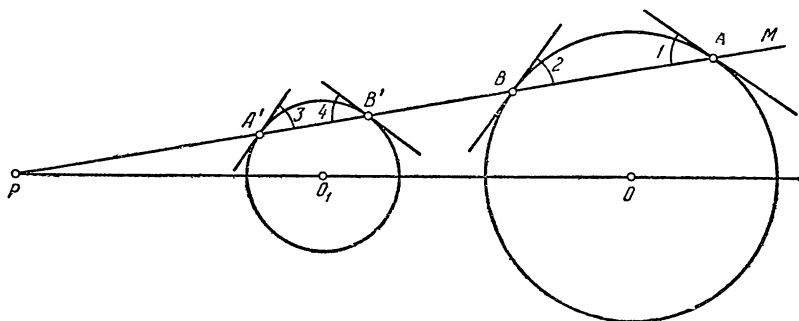


Черт. 137

Легко видеть, что величина этого угла не зависит от выбора точки пересечения окружности и прямой. Будем говорить также, что прямая и окружность пересекаются под указанным выше углом.

Будем считать для общности, что окружность и касающаяся ее прямая пересекаются под нулевым углом.

Окружность и пересекающую ее прямую назовем *взаимно ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом.



Черт. 138

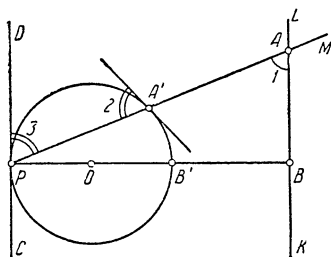
Т е о р е м а (основное свойство инверсии). *Величина угла между двумя пересекающимися линиями не изменяется при инверсии.*

З а м е ч а н и е. Под линиями здесь мы будем понимать окружности и прямые. Однако высказанное свойство имеет место для произвольных линий.

Доказательство начнем с рассмотрения случая, когда пересекающимися линиями являются окружность O , не проходящая через центр инверсии P , и прямая PM , проходящая через него (черт. 138).

При инверсии прямая PM отображается сама в себя, а окружность O в окружность O_1 (центры окружностей O и O_1 не являются взаимно обратными точками). Пусть прямая PM пересекает окружность O в точках A и B , в которых образует с ней углы 1 и 2 . Тогда эта прямая пересечет окружность O_1 в точках A' и B' , соответственно инверсных точках A и B , и образует с ней углы 3 и 4 . Как было показано выше (§ 47), две взаимно обратные окружности можно рассматривать как гомотетичные фигуры, причем центром гомотетии является центр инверсии P . Точкой, гомотетичной точке A , является точка B' . Так как в гомотетичных фигурах соответственные углы равны, то $\angle 1 = \angle 4$. Но $\angle 4 = \angle 3$. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$, что и требовалось установить.

Пусть теперь пересекающимися линиями будут две прямые — KL и PM , из которых одна проходит через центр



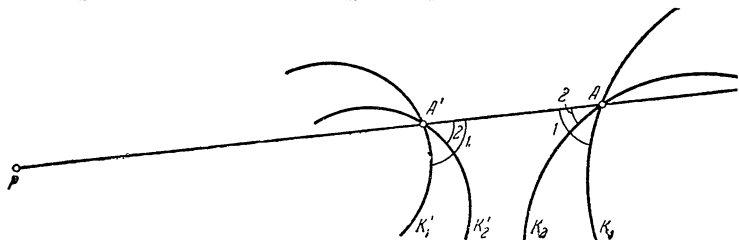
Черт. 139

инверсии P (черт. 139). Тогда прямая KL отобразится в окружность O , проходящую через центр инверсии P , прямая PM — сама в себя, а точка пересечения данных прямых A — в точку A' , в которой пересекаются прямая PM и окружность O . Углу 1 между данными прямыми соответствует угол 2 , образованный при пересечении в точке A' прямой

PM с окружностью O . Проведем $PB \perp KL$. Так как PB проходит через центр окружности O , то касательная CD к этой окружности, проходящая через точку P , параллельна данной прямой KL . Поэтому PM образует с прямыми CD и KL равные внутренние накрест лежащие углы: $\angle 3 = \angle 1$.

Так как $\angle 3 = \angle 2$, то $\angle 2 = \angle 1$, что и требовалось установить.

Рассмотрим теперь произвольные линии K_1 и K_2 , пересекающиеся в точке A (черт. 140). Взаимно обратные им линии K'_1 и K'_2 пересекаются в точке A' , инверсной точке A . Поэтому прямая PA , проходящая через центр инверсии, пройдет также и через точку A' . Так как углы прямой PA с линиями K_1 и K'_1 и соответственно с линиями K_2 и K'_2 равны, то отсюда следует равенство углов между линиями K_1 и K_2 и линиями K'_1 и K'_2 . Например, для случая, пред-



Черт. 140

ставленного чертежом, прямая PA образует с линиями K_1 и K'_1 равные углы, обозначенные цифрой 1, а с линиями K_2 и K'_2 равные углы, обозначенные цифрой 2. Угол между линиями K_1 и K_2 —равен в данном случае разности углов 1 и 2. Этой же разности равен также угол между линиями K'_1 и K'_2 .

С л е д с т в и е. Касающиеся линии при инверсии отображаются в касающиеся линии.

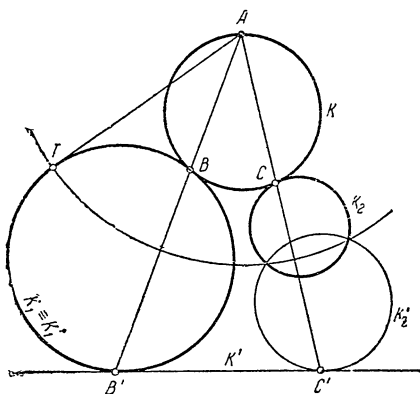
§ 49. Задача Аполлония

Рассмотрим применение инверсии к решению некоторых задач на построение.

З а д а ч а. Построить окружность K , проходящую через данную точку A и касающуюся данных окружностей K_1 и K_2 , не проходящих через точку A .

Р е ш е н и е. Возьмем инверсию с центром в точке A (черт. 141). Тогда искомая окружность K отобразится в прямую K' , касающуюся окружностей K'_1 и K'_2 , в которые отобразятся соответственно данные окружности. Отсюда вытекает следующее построение окружности K . Строим окружности K'_1 и K'_2 , инверсные окружностям K_1 и K_2 ; проводим, далее, общую касательную $B'C'$ к окружностям K'_1 и

K'_2 и отмечаем на них точки касания B' и C' ; находим на окружностях K_1 и K_2 точки B и C , инверсные точкам B' и C' , и строим окружность K , проходящую через точки A , B и C .



Черт. 141

Окружность K — искомая. Действительно, прямая K' отображается при инверсии в окружность, проходящую через точки A , B и C , т. е. в окружность K . Так как прямая K' касается окружностей K'_1 и K'_2 в точках B' и C' , то окружность K касается окружностей K_1 и K_2 в точках B и C .

Так как две окружности имеют самое большее четыре общие касательные, то задача имеет самое большее четыре решения, но может не иметь ни одного решения (например, решений нет, если окружности K_1 и K_2 лежат вне друг друга, а точка A лежит внутри одной из них).

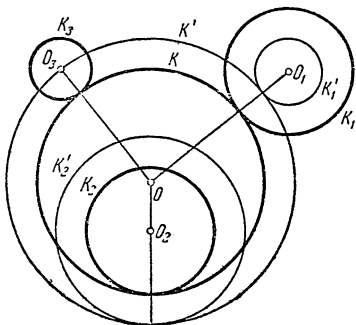
В целях упрощения окружность инверсии можно взять ортогональной окружности K_1 (или K_2), что осуществлено на чертеже 141. Тогда окружность K'_1 совпадает с окружностью K_1 .

Задача Аполлония. Построить окружность K , касающуюся трех данных окружностей — K_1 , K_2 и K_3 .

Решенную выше задачу можно рассматривать как частный случай задачи Аполлония, когда окружность K_3 вырождается в точку A . К этому частному случаю легко свести задачу Аполлония.

Пусть надо построить окружность K , касающуюся окружностей K_1 и K_3 внешним образом, а окружности K_2 —

внутренним образом. Будем считать, что окружность K_3 имеет наименьший радиус (черт. 142). Рассмотрим окружность K' , concentricкую с окружностью K и проходящую через центр окружности K_3 . Она будет касаться окружности K'_1 , concentricкой с K_1 и имеющей радиус, равный разности радиусов окружностей K_1 и K_3 . Она касается также окружности K'_2 , concentricкой с K_2 и имеющей радиус, равный сумме радиусов окружностей K_2 и K_3 . Окружности K'_1 и K'_2 легко построить. После этого строим окружность K' , проходящую через точку O_3 и касающуюся окружностей K'_1 и K'_2 . Наконец, строим окружность K , concentricкую с K' и с радиусом, уменьшенным на радиус окружности K_3 .



Черт. 142

Детальный анализ этой задачи показывает, что она может иметь любое число решений от нуля (нет решений) до восьми включительно.

ГЛАВА VII

ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ (продолжение)

§ 50. Алгебраический метод решения задач на построение

В задаче на построение среди данных элементов могут быть некоторые отрезки, углы и отношения отрезков. Данный угол можно заменить заданием трех отрезков — сторон треугольника, имеющего угол, равный данному. Данное отношение отрезков может быть представлено двумя отрезками. Таким путем можно все данные элементы свести к данным отрезкам a, b, \dots, l . Искомые элементы мы можем тоже таким же путем выразить через неизвестные отрезки x, y, \dots, w и свести задачу к построению этих отрезков.

Под $a, b, \dots, l, x, y, \dots, w$ будем в дальнейшем понимать также длины соответствующих отрезков при выбранной единице длины E .

Положим, что при помощи метрических соотношений длины неизвестных отрезков x, y, \dots, ω выражены через длины данных отрезков a, b, \dots, l :

$$x = f_1(a, b, \dots, l),$$

$$y = f_2(a, b, \dots, l),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\omega = f_n(a, b, \dots, l).$$

Пользуясь полученными формулами, часто оказывается возможным построить искомые отрезки при помощи выбранных инструментов. Выполнив эти построения, мы сможем построить саму искомую фигуру, т. е. решить задачу. В этом сущность алгебраического метода решения задач на построение.

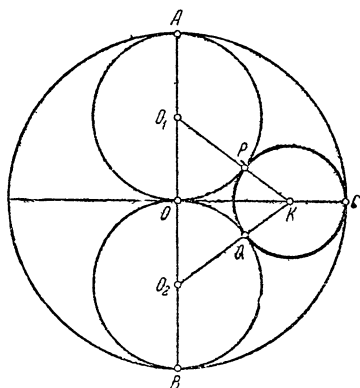
Отметим, что $f_i(a, b, \dots, l)$ представляет всегда однородное выражение первой степени относительно a, b, \dots, l . Действительно, при гомотетии с коэффициентом k отрезки $a, b, \dots, l, x, y, \dots, \omega$ отображаются в отрезки $ka, kb, \dots, kl, kx, ky, \dots, k\omega$, но метрические соотношения между ними остаются теми же, т. е. будем иметь:

$$kx = f_1(ka, kb, \dots, kl),$$

$$ky = f_2(ka, kb, \dots, kl),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k\omega = f_n(ka, kb, \dots, kl).$$



Черт. 143

Задача. В окружности O проведен диаметр AB . На радиусах OA и OB , как на диаметрах, построены окружности O_1 и O_2 . Построить окружность K , касающуюся трех данных окружностей (черт. 143).

Пусть K — центр искомой окружности, C, P и Q — точки касания ее с данными окружностями ($OA = a$), x — радиус искомой окружности ($KC = KP = KQ = x$).

Из прямоугольного треугольника O_1KO имеем:

$$O_1K^2 = O_1O^2 + OK^2$$

или

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-x)^2.$$

Отсюда:

$$x = \frac{a}{3},$$

$$\text{т. е. } KC = \frac{1}{3} OC.$$

Построение окружности K свелось к делению отрезка OC на три части.

Решение приведенной задачи оказалось простым, так как проста формула, выражающая искомый отрезок через данный. При решении других задач формулы для построения искомых отрезков могут оказаться сложными. Поэтому для успешного использования алгебраического метода надо уметь строить неизвестный отрезок x по формуле, выражающей его длину через длины данных отрезков. В школьном курсе рассматриваются построения отрезка x по следующим простейшим формулам:

1) $x = a \pm b$ (построение суммы и разности двух отрезков);

2) $x = \frac{m}{n} a$, где m и n — натуральные числа (сводится к делению отрезка a на n равных частей);

3) $x = \frac{ab}{c}$ (построение отрезка, четвертого пропорционального к трем данным);

4) $x = \sqrt{ab}$ (построение отрезка, среднего пропорционального к отрезкам a и b);

5) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ (построение гипотенузы прямоугольного треугольника по его катетам);

6) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (построение катета прямоугольного треугольника по гипотенузе и другому катету).

Покажем на примерах, как строится отрезок в более сложных случаях.

7) $x = a\sqrt{m}$, где m — натуральное число. Пусть $m = pq$.

Тогда имеем:

$$x = \sqrt[3]{a^2 m} = \sqrt[3]{(pa)(qa)} = \sqrt[3]{uv},$$

где $u = pa$ и $v = qa$.

Задача свелась к построению 4.

Если число m можно представить в виде $m = p^2 \pm q^2$ (p и q — натуральные числа), то

$$x = \sqrt[3]{(pa)^2 \pm (qa)^2} = \sqrt[3]{u^2 \pm v^2}.$$

Задача свелась к построению 5 или к построению 6.

Пример: $x = a \sqrt[3]{13} = \sqrt[3]{(3a)^2 + (2a)^2}.$

8) $x = \frac{abc}{hl}.$

Положим $u = \frac{bc}{l}$. Тогда $x = \frac{au}{h}.$

Задача свелась к построению 3, повторенному дважды.

9) $x = \sqrt[3]{a^2 - 3b^2 + 2ab}.$

Полагаем: $a^2 - 3b^2 = y^2,$
 $2ab = z^2.$

Отсюда:

$$x = \sqrt[3]{y^2 + z^2},$$

$$y = \sqrt{a^2 - (b\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 - u^2},$$

где $u = b\sqrt{3} = \sqrt{(2b)^2 - b^2}$ (или $u = \sqrt{b \cdot 3b}$);

$$z = \sqrt{a(2b)}.$$

Построения проводим в следующем порядке:

первое построение — $v = 2b,$

второе построение — $z = \sqrt{av},$

третье построение — $u = \sqrt{v^2 - b^2},$

четвертое построение — $y = \sqrt{a^2 - u^2},$

пятое построение — $x = \sqrt[3]{y^2 + z^2}.$

10) $x = \sqrt[8]{a^8 - b^8}.$

Подкоренное выражение представим следующим образом:

$$a^8 - b^8 = (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = y^4 \cdot z^4,$$

где $y^4 = a^4 - b^4$ и $z^4 = a^4 + b^4$.

Далее получим:

$$y^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = u^2 v^2, \text{ т. е. } y^2 = uv,$$

где $u = \sqrt{a^2 - b^2}$ и $v = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$$z^4 = a^2 \left(a^2 + \frac{b^4}{a^2} \right) = a^2 \omega^2, \text{ т. е. } z^2 = a\omega,$$

где $\omega^2 = a^2 + \frac{b^4}{a^2}$.

Полагая $\frac{b^2}{a} = t$, получим следующую цепочку построений:

первое построение — $u = \sqrt{a^2 - b^2}$,

второе построение — $v = \sqrt{a^2 + b^2}$,

третье построение — $y = \sqrt{uv}$,

четвертое построение — $t = \frac{bb}{a} \left(\frac{t}{b} = \frac{b}{a} \right)$,

пятое построение — $\omega = \sqrt{a^2 + t^2}$,

шестое построение — $z = \sqrt{a\omega}$.

Окончательно получим:

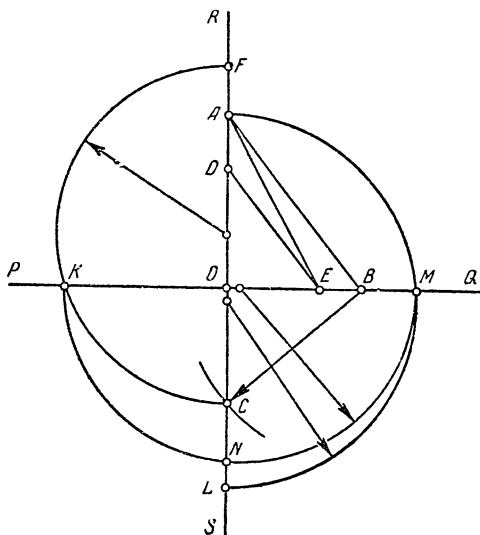
$$x = \sqrt[8]{y^4 z^4} = \sqrt{yz}.$$

Обычно при выполнении построений каждое последующее стараются выполнить на базе предыдущих, не перемещая по возможности построенные уже отрезки. Этого мы будем придерживаться при выполнении всех построений в данной задаче.

Пусть a и b — данные отрезки. Построим две взаимно перпендикулярные прямые PQ и RS . От точки их пересечения O отложим на них отрезки $OA = a$, $OB = b$, $OD = b$, как показано на чертеже 144.

П о с т р о е н и е 1. Строим окружность радиуса a с центром в точке B и точку пересечения ее с лучом OS (точка C). Тогда $OC = u$.

Построение 2. Строим отрезок AB . Очевидно, что $AB = v$.



Черт. 144

Построение 3. На луче OR откладываем $OF = AB$ и на отрезке FC , как на диаметре, строим окружность. Отмечаем точку K , в которой она пересекается с лучом OP . Тогда $OK = y$.

Построение 4. Через точку D проводим прямую, параллельную прямой AB , и отмечаем точку пересечения ее с лучом OQ (точка E).

Так как

$$\frac{OE}{OD} = \frac{OB}{OA},$$

то
$$OE = \frac{OD \cdot OB}{OA} = \frac{bb}{a} = t.$$

Построение 5. Соединив точки A и E , получим отрезок $AE = w$.

Построение 6. На луче OS откладываем $OL = AE$ и на отрезке AL , как на диаметре, строим окружность. Отметим точку M , в которой она пересекается с лучом OQ . Легко видеть, что $OM = z$.

Построение 7. На отрезке KM , как на диаметре, строим окружность. Отметим точку N , в которой она пересекается с лучом OS . Отрезок ON является искомым отрезком x .

Задача. Построить отрезки, длины которых равны корням квадратного уравнения:

$$x^2 - ax + b^2 = 0,$$

где a и b — длины данных отрезков.

Корни данного уравнения будут:

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} = \frac{a}{2} + u,$$

$$x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} = \frac{a}{2} - u,$$

где
$$u = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}.$$

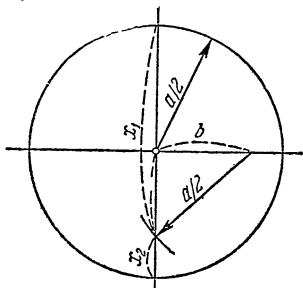
Построение отрезков x_1 и x_2 дано на чертеже 145.

Дадим и другое решение, основанное на формулах Виета:

$$x_1 + x_2 = a,$$

$$x_1 \cdot x_2 = b^2.$$

На отрезке $AB = a$, как на диаметре, строим окружность (черт. 146). Затем проводим прямую MN , параллельную прямой AB и на расстоянии b от нее. Отметим точку C , в которой прямая MN пересекается с окружностью. Опустим затем из точки C перпендикуляр CD на AB . Длины отрезков AD и DB дадут значения корней данного уравнения ($AD + DB = a$; $AD \cdot DB = CD^2 = b^2$).



Черт. 145

Решение возможно, если $b \leq \frac{a}{2}$.

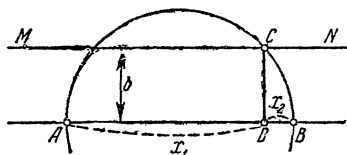
Задача. Построить отрезки, длины которых равны корням квадратного уравнения:

$$x^2 - ax - b^2 = 0,$$

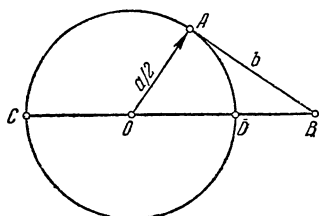
где a и b — длины данных отрезков.

$$\text{Решение. } x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{a}{2} + u > 0,$$

$$x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{a}{2} - u < 0.$$



Черт. 146



Черт. 147

Строим окружность с радиусом $\frac{a}{2}$ и проводим к ней касательную, на которой от точки касания A откладываем отрезок $AB = b$ (черт. 147). Через точку B и центр окружности O проводим прямую и отмечаем точки C и D , в которых она пересекается с окружностью. Тогда $OB = u$, $CB = u + \frac{a}{2} = x_1$ и $DB = u - \frac{a}{2} = -x_2$.

§ 51. Точки, построение которых осуществимо циркулем и линейкой

Выберем систему координат на плоскости (E — единица измерения). Решим вопрос, какие точки плоскости можно построить при помощи циркуля и линейки.

Прежде всего мы заметим, что при помощи этих инструментов можно строить отрезки вида $\frac{m}{n}E$ и перпендикулярные прямые. Отсюда следует, что при помощи циркуля и линейки можно построить любую точку, координаты которой принадлежат полю рациональных чисел.

Пусть R_0 — поле рациональных чисел a_0, b_0, c_0, \dots , а M_0 — множество точек, координаты которых принадлежат полю R_0 .

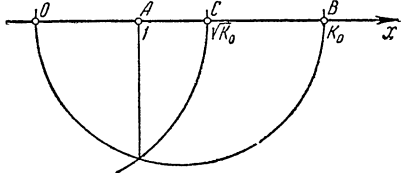
Пусть, далее, $k_0 > 0$ — число поля R_0 такое, что $\sqrt{k_0}$ не принадлежит этому полю (например, $k_0 = 3$). Присоединяя к полю R_0 число $\sqrt{k_0}$, получим совокупность чисел a_1 ,

b_1, c_1, \dots вида $a_0 + b_0 \sqrt{k_0}$, которую обозначим через R_1 . Как известно, множество чисел R_1 является полем. В поле R_1 войдут все рациональные числа. Будем говорить, что поле R_1 получено из поля рациональных чисел R_0 путем присоединения к нему квадратного корня $\sqrt{k_0}$.

Возьмем на оси x точки A и B с абсциссами 1 и k_0 (черт. 148). Построим отрезок OC , средний пропорциональный между отрезками OA и OB . Его длина будет $\sqrt{k_0}$. Далее, мы можем построить отрезок x по формуле $x = \frac{b_0 \sqrt{k_0}}{1}$.

Отрезок x будет четвертым пропорциональным к отрезкам OA , OC и OD , длины которых соответственно равны 1, $\sqrt{k_0}$ и b_0 . Наконец, мы сможем построить отрезок $a_0 + b_0 \sqrt{k_0}$.

Отсюда следует вывод, что при помощи циркуля и линейки можно построить любую точку, координаты которой принадлежат полю R_1 . Совокупность этих точек обозначим через M_1 .



Черт. 148

Возьмем, далее, число k_1 из поля R_1 ($k_1 > 0$) такое, что $\sqrt{k_1}$ уже не принадлежит этому полю¹⁾. Присоединяя $\sqrt{k_1}$ к полю R_1 , получим множество чисел a_2, b_2, c_2, \dots вида $a_1 + b_1 \sqrt{k_1}$, которое является полем R_2 . В поле R_2 войдут все числа поля R_1 (при $b_1 = 0$). Мы скажем, что поле R_2 получено из поля R_1 путем присоединения к нему квадратного корня $\sqrt{k_1}$.

Так как на оси x мы можем построить точки с абсциссами 1, k_1 и b_1 , то, как показано выше, исходя из этих точек, можно построить точки с абсциссами $\sqrt{k_1}$ и $b_1 \sqrt{k_1}$. Отсюда вытекает, что мы можем построить при помощи циркуля и линейки все точки, координаты которых принадлежат полю R_2 . Множество этих точек обозначим через M_2 .

¹⁾ Если $k_0 = 3$, то k_1 может быть, например, числом 5 или числом $2 + 3\sqrt{3}$.

Присоединяя, далее, к полю R_2 число $\sqrt{k_2}$, не принадлежащее этому полю, получим новое поле R_3 . Полю R_3 будет соответствовать множество точек M_3 с координатами, принадлежащими этому полю. Основываясь на множестве точек M_2 , мы можем построить любую точку из M_3 тем же путем, что и при построении точек множества M_2 , исходя из множества точек M_1 .

Продолжая этот процесс n раз, мы придем к числовому полю R_n , о котором скажем, что оно получено из поля рациональных чисел путем последовательного присоединения к нему квадратных корней. Этому числовому полю будет соответствовать множество точек M_n , с координатами из этого поля. Предыдущие рассуждения показывают, что любую точку множества M_n можно построить при помощи циркуля и линейки.

Покажем теперь, что исходя из единичного отрезка и взятой системы осей координат при помощи циркуля и линейки, можно построить только такую точку, координаты которой принадлежат некоторому полю R_n , полученному указанным выше способом.

Положим, что мы можем построить любую точку, координаты которой принадлежат некоторому числовому полю R . Числа этого поля обозначим буквами a, b, c, \dots . Множество точек, координаты которых принадлежат этому полю, обозначим буквой M .

Уравнение прямой, проходящей через точки $A(a, b)$ и $B(c, d)$:

$$\frac{x-a}{c-a} = \frac{y-b}{d-b}.$$

После преобразований получим уравнение в виде

$$px + qy + s = 0,$$

где p, q и s , как легко видеть, принадлежат R .

Для определения точки пересечения двух таких прямых потребуется решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} px + qy + s &= 0, \\ p'x + q'y + s' &= 0, \end{aligned}$$

коэффициенты которой принадлежат полю R . Так как при решении этой системы мы будем производить над ее коэффициентами только рациональные операции, то полученные значения для x и y будут принадлежать тому же полю R .

Итак, точка пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через две точки множества M , принадлежит тому же множеству M .

Уравнение окружности с центром в точке $O(a, b)$, проходящей через точку $A(c, d)$ (O и A — точки множества M), следующее:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2.$$

После преобразования получим:

$$x^2 + y^2 + qx + hy + t = 0,$$

где, как легко видеть, коэффициенты q , h и t принадлежат полю R .

Для определения координат точек пересечения данной окружности и рассмотренной выше прямой требуется решить систему уравнений:

$$x^2 + y^2 + qx + hy + t = 0,$$

$$px + qy + s = 0,$$

коэффициенты которой принадлежат полю R .

Решая эту систему обычными методами, получим для неизвестных x и y выражения:

$$x = l \pm m\sqrt{k},$$

$$y = l' \pm m'\sqrt{k},$$

где числа k , l , m , l' и m' принадлежат полю R . Следовательно, координаты точек пересечения прямой и окружности будут или принадлежать полю R , или расширению этого поля $R' = R(\sqrt{k})$, полученному путем присоединения к полю R квадратного корня \sqrt{k} (если этот корень не принадлежит полю R).

Для получения точек пересечения двух таких окружностей требуется решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + qx + hy + t = 0, \\ x^2 + y^2 + q'x + h'y + t' = 0, \end{cases}$$

которая легко сводится к следующей:

$$x^2 + y^2 + qx + hy + t = 0,$$

$$(q - q')x + (h - h')y + (t - t') = 0.$$

Следовательно, в этом случае приходим к тому же результату, что и в предыдущем.

При решении задач на построение циркулем и линейкой новые точки мы получаем или как точки пересечения прямых, или как точки пересечения прямой и окружности, или как точки пересечения двух окружностей. Приведенные рассуждения показывают, что на основе множества точек M_0 , координаты которых принадлежат полю рациональных чисел, при помощи циркуля и линейки мы можем построить только точку, координаты которой принадлежат некоторому полю R_n , о котором говорилось выше.

Итак, при помощи циркуля и линейки, исходя из заданной системы координат (с единичным отрезком E), мы можем построить те и только те точки, координаты которых принадлежат полю R_n , полученному из поля рациональных чисел путем последовательного присоединения к нему квадратных радикалов.

Остановимся кратко на общем случае, когда, кроме единичного отрезка, могут быть даны некоторые отрезки a, b, \dots, l , длины которых не являются рациональными числами. Как показано в курсах высшей алгебры, мы можем построить поле $R = R_0(a, b, \dots, l)$ путем присоединения к полю рациональных чисел R_0 положительных действительных чисел a, b, \dots, l . В этом случае, пользуясь выбранной системой осей координат, единичным отрезком и данными отрезками a, b, \dots, l , мы при помощи циркуля и линейки сможем построить любую точку, координаты которой принадлежат полю R . Пусть M — множество точек плоскости с координатами из поля R .

Повторяя для поля R и множества точек M рассуждения, которые мы проделали для поля R_0 и множества точек M_0 , мы приходим к следующему результату:

при помощи циркуля и линейки, исходя из выбранной системы координат (с единичным отрезком E) и данных отрезков a, b, \dots, l , мы можем построить те и только те точки, координаты которых принадлежат полю R_n , полученному из поля $R = R_0(a, b, \dots, l)$, путем последовательного присоединения к нему квадратных радикалов.

Теперь мы можем ответить на вопрос: разрешима ли циркулем и линейкой задача, которая сведена к построению отрезков? Пусть a, b, \dots, l — данные отрезки. Построение отрезка x равносильно построению точки $(x; 0)$ для произвольной системы осей координат. Если число x принадлежит некоторому полю R_n , полученному из поля $R = \bar{R}(a, b, \dots, l)$ путем последовательного присоединения к нему квадрат-

ных корней, то искомый отрезок может быть построен циркулем и линейкой, т. е. данная задача разрешима указанными инструментами. Если же число x не принадлежит такому полю, то точка $(x; 0)$ (а значит, и отрезок x) не может быть построена циркулем и линейкой, т. е. данная задача неразрешима при помощи этих инструментов.

§ 52. Неразрешимость некоторых задач на построение циркулем и линейкой

Пусть a, b, \dots, l — данные отрезки, а x — искомый отрезок, который выражается через данные при помощи уравнения

$$f(x, a, b, \dots, l) = 0.$$

При решении вопроса о неразрешимости отдельных задач на построение мы можем считать числа a, b, \dots, l рациональными. Если задача в этом случае окажется неразрешимой, то, значит, она неразрешима вообще. Это не исключает, конечно, разрешимости задачи при некоторых определенных значениях данных отрезков. Например, задача о делении произвольного угла на три равные части неразрешима при помощи циркуля и линейки, но легко при помощи этих инструментов построить угол 30° , т. е. разделить прямой угол на три равные части.

Если a, b, c, \dots, l — рациональные числа, но число x не принадлежит полю R_n , которое получается из поля рациональных чисел путем последовательного присоединения к нему квадратных корней, то нельзя построить при помощи циркуля и линейки точку $(x; 0)$ и, следовательно, отрезок x . Задача на построение в этом случае будет неразрешимой при помощи указанных инструментов.

При рассмотрении конкретных примеров в дальнейшем нам потребуется следующая теорема из курса высшей алгебры.

Т е о р е м а. Если уравнение

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, то его действительные корни не принадлежат никакому полю R_n , которое может быть получено из поля рациональных чисел путем последовательного присоединения к нему конечного числа квадратных корней.

Следовательно, можно сказать, что, исходя из единичного отрезка, нельзя построить корни такого уравнения циркулем и линейкой.

Рассмотрим теперь три знаменитые геометрические задачи древности и покажем их неразрешимость при помощи циркуля и линейки.

Задача об удвоении куба. Построить ребро куба, объем которого равен удвоенному объему данного куба.

Примем ребро данного куба за единицу длины. Тогда ребро искомого куба x определится из уравнения: $x^3 = 2$ или $x^3 - 2 = 0$.

Полученное уравнение не имеет рациональных корней. Следовательно, его единственный действительный корень не может быть построен циркулем и линейкой.

Задача о трисекции угла. Разделить произвольный угол на три равные части.

Докажем, например, что угол в 30° нельзя разделить на три равные части при помощи циркуля и линейки.

Задача сводится к определению $\sin 10^\circ$. Если $\sin \alpha = \frac{m}{n}$, то угол α определится из прямоугольного треугольника с гипотенузой n и катетом m . Гипотенузу n мы можем принять равной выбранной единице длины. Тогда $\sin \alpha = \frac{m}{1}$ и построение угла α сводится к построению отрезка m . В нашем случае положим $\sin 10^\circ = x$. Задача сводится к определению неизвестного x и построению отрезка, длина которого равна x .

Как известно

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

В нашем случае

$$\sin 30^\circ = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ,$$

или

$$\frac{1}{2} = 3x - 4x^3.$$

Отсюда получаем уравнение для определения x :

$$8x^3 - 6x + 1 = 0.$$

Полагая $y = 2x$, приходим к уравнению:

$$y^3 - 3y + 1 = 0.$$

Это уравнение, как легко убедиться, не имеет рациональных корней. Следовательно, отрезок x не может быть построен при помощи циркуля и линейки; поставленная задача неразрешима при помощи этих инструментов.

Задача о квадратуре круга. Построить квадрат, равновеликий кругу данного радиуса r .

Примем $r = 1$ (единица длины). Тогда задача сводится к построению отрезка

$$x = \sqrt{\pi}.$$

Доказано, что число $\sqrt{\pi}$ не является корнем уравнения вида

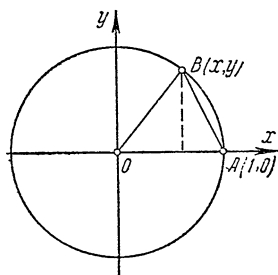
$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с рациональными коэффициентами. Отсюда следует, что число π не может принадлежать никакому полю R_n , о котором говорилось выше. Значит, отрезок x не может быть построен циркулем и линейкой.

В качестве последнего примера покажем невозможность построения правильного семиугольника при помощи циркуля и линейки.

Возьмем начало координат в центре окружности, радиус которой примем за единицу длины.

Пусть A и B — две вершины правильного семиугольника, причем координаты A суть числа 1 и 0 (черт. 149). Координаты точки B обозначим через x и y . Если точку B можно построить при помощи циркуля и линейки, то x и y должны принадлежать некоторому полю R_n , полученному из поля рациональных чисел путем последовательного присоединения к нему квадратных корней. Этому же полю должно принадлежать их отношение $\frac{y}{x}$, т. е. $\operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол BOA .



Черт. 149

Рассмотрим комплексное число $z = x + yi = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Так как $\varphi = \frac{2\pi}{7}$, то $z^7 = 1$, или $z^7 - 1 = 0$.

Отсюда получаем:

$$(x + yi)^7 - 1 = 0,$$

$$x^7 + 7 x^6 y i - 21 x^5 y^2 - 35 x^4 y^3 i + 35 x^3 y^4 + \\ + 21 x^2 y^5 i - 7 x y^6 - y^7 i - 1 = 0.$$

По условиям равенства нулю комплексного числа коэффициент при i должен быть равен нулю:

$$7 x^6 y - 35 x^4 y^3 + 21 x^2 y^5 - y^7 = 0.$$

Так как мы ищем координаты точки B , то $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Поэтому мы можем разделить обе части уравнения на $x^6 y$. Производя это деление, меняя знак и полагая

$$u = \frac{y^2}{x^2},$$

получим:

$$u^3 - 21 u^2 + 35 u - 7 = 0.$$

Полученное уравнение, как легко убедиться, не имеет рациональных корней. Следовательно, оно неразрешимо в квадратных радикалах. Отсюда следует, что отношение $\frac{y}{x}$ не может принадлежать полю R_n , а поэтому точка B не может быть построена при помощи циркуля и линейки.

В связи с последней задачей затронем вопрос о том, какие правильные многоугольники можно строить циркулем и линейкой.

Положим, что мы можем разделить окружность на p и q равных частей, где p и q — взаимно простые числа и $q > p$. Как следует из алгоритма Евклида, для отыскания наибольшего общего делителя можно подобрать такие два натуральных числа u и v , при которых

$$uq - vp = 1.$$

Деля обе части этого равенства на pq , получим:

$$\frac{u}{p} - \frac{v}{q} = \frac{1}{pq}.$$

Если мы возьмем u раз $\frac{1}{p}$ часть окружности и вычтем из полученной дуги v раз повторенную $\frac{1}{q}$ часть окружности, то получим дугу, составляющую $\frac{1}{pq}$ часть всей окружности.

Следовательно, если можно циркулем и линейкой разделить окружность на p и q равных частей, где p и q — взаим-

но простые числа, то ее можно также разделить на $n = pq$ равных частей.

Пример. $n = 15$. Так как $15 = 3 \cdot 5$, а 3 и 5 — взаимно простые числа, то циркулем и линейкой можно построить правильный пятнадцатигульник (построение правильных треугольников и пятиугольников известно из школьного курса). Легко видеть, что в данном случае

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5},$$

т. е. из удвоенной третьей части окружности достаточно вычесть утроенную пятую часть ее.

В 1796 г. знаменитый немецкий математик К. Ф. Гаусс доказал следующую теорему.

Теорема Гаусса. *Построение правильного n -угольника циркулем и линейкой возможно тогда и только тогда, когда число n может быть представлено в виде*

$$n = 2^m p_1 p_2 \dots p_s,$$

где p_1, p_2, \dots, p_s — различные простые числа вида $2^{2^k} + 1$.

При $m = 0$ и $s = 1$ получим: $n = p = 2^{2^k} + 1$. Полагая $k = 0$ и $k = 1$, получим соответственно числа $n = 3$ и $n = 5$. При $k = 2$ $n = 17$. Следовательно, правильный 17-угольник можно построить циркулем и линейкой (известно несколько различных способов такого построения).

Так как числа 7, 9, 11, 13 и 14 нельзя представить в указанном виде, то построение соответствующих правильных многоугольников циркулем и линейкой невозможно.

Используя другие инструменты, кроме циркуля и линейки, можно решить задачи, не разрешимые циркулем и линейкой. Понятно, что тогда мы будем иметь другую систему элементарных построений. Известно, например, что при помощи параболы могут быть построены действительные корни уравнений третьей и четвертой степеней с рациональными коэффициентами. Следовательно, задачи об удвоении куба, о трисекции угла и о построении правильного семиугольника можно решить циркулем и линейкой, используя один раз инструмент для построения параболы. Путем применения различных инструментов, отличных от циркуля и линейки, указанные три знаменитые задачи были решены различными способами еще математиками Древней Греции.

§ 53. Построения одним циркулем

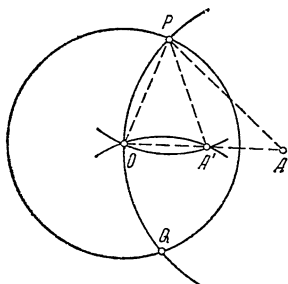
В § 14 мы уже говорили о построениях при помощи одного циркуля. Докажем теперь, что все построения циркулем и линейкой могут быть выполнены одним циркулем. Для этого воспользуемся рассмотренным нами в главе VI преобразованием инверсии.

Прежде всего покажем, как одним циркулем построить точку, инверсную данной относительно данной окружности.

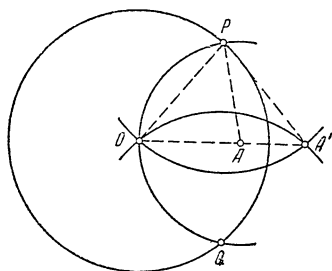
Пусть A — данная точка, а O — окружность инверсии.

С л у ч а й 1. $OA > \frac{r}{2}$, где r — радиус окружности инверсии (черт. 150 а, 150 б).

Строим окружность радиуса AO с центром в точке A ; из точек пересечения ее с окружностью O (точки P и Q),



Черт. 150 а



Черт. 150 б

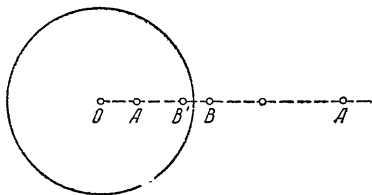
как из центров, строим окружности радиуса r . Эти две последние окружности, кроме точки O , пересекутся еще в некоторой точке A' , которая будет искомой.

Действительно, точки O , A и A' лежат на одной прямой, как точки, равноудаленные от точек P и Q . Кроме того, $\triangle OPA \sim \triangle OPA'$, так как эти треугольники равнобедренные и имеют общий угол при вершине O . Отсюда:

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OA'},$$

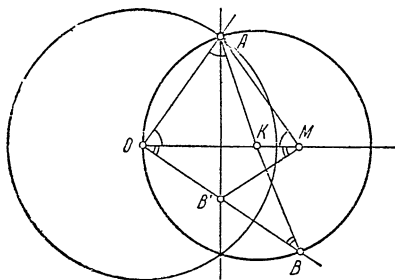
или $OA' \cdot OA = OP^2 = r^2$, т. е. A и A' — взаимно обратные точки.

С л у ч а й 2. $OA < \frac{r}{2}$.

$$\begin{aligned} OA \cdot OA' &= OA \cdot n \cdot OB' = \\ &= (n \cdot OA) \cdot OB' = \\ &= OB \cdot OB' = r^2, \end{aligned}$$


Черт. 151

т. е. точка A' инверсна
точке A .



Черт. 152

точки A' и B' , инверсные данным точкам A и B (что можно выполнить одним циркулем). В целях упрощения чертежа возьмем окружность инверсии, проходящей через точку A . Тогда точки A и A' совпадают. При помощи одного циркуля построим точку M , симметричную точке O относительно прямой AB' . Наконец, строим точку K , инверсную точке M .

По построению точки O , K и M лежат на одной прямой и $OK \cdot OM = OA^2$. Отсюда:

$$\frac{OK}{OA} = \frac{OA}{OM}.$$

Треугольники OAK и OAM подобны, так как $\angle AOM$ у них общий, а стороны, заключающие его, пропорциональ-

ны. Поэтому $\angle OAK = \angle OMA$. По построению $OA = MA$. Следовательно, $OK = AK$. Рассматривая треугольники OMB' и OKB , совершенно также докажем, что они подобны и $KB = OK$. Таким образом, точка K является центром искомой окружности.

Чтобы построить окружность, инверсную данной окружности, возьмем на последней три произвольные точки A , B и C , построим инверсные им точки A' , B' и C' и проведем через них окружность. Все необходимые при этом построения могут быть выполнены одним циркулем.

Если дана прямая двумя точками A и B , то для построения окружности, ей инверсной (предполагая, что прямая AB не проходит через центр инверсии), строим точки A' и B' , взаимно обратные точкам A и B , и проводим окружность через точки A' , B' и центр инверсии. Все необходимые при этом построения могут быть также выполнены одним циркулем.

Рассмотрим теперь задачу о построении одним циркулем точек пересечения окружности C и прямой, заданной точками A и B .

Возьмем произвольную окружность так, чтобы ее центр не лежал на прямой AB и на окружности C , и примем эту окружность за окружность инверсии. Строим затем окружности C' и K' , инверсные данной окружности C и данной прямой AB . Пусть M' и N' — точки пересечения окружностей C' и K' . Тогда точки M и N , обратные им, являются искомыми. Эти точки, следовательно, можно построить, применяя только циркуль.

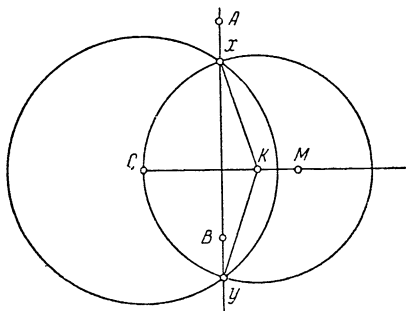
Если даны две прямые AB и CD , заданные точками A , B и C , D , то строим окружности, им инверсные, находим точку их пересечения M' , отличную от центра инверсии, и строим точку M , обратную точке M' . Точка M будет искомой точкой пересечения прямых AB и CD .

Отсюда вытекает упомянутая в § 14 теорема Мора — Маскерони: *Все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, разрешимы также одним циркулем.*

Из доказательства данной теоремы вытекает и общий метод решения задач одним циркулем. Само собой разумеется, что конкретные задачи могут иметь более простые решения.

При нахождении точек пересечения окружности и прямой удобно данную окружность принять за окружность инверсии. Окружность, инверсная прямой AB , пересекается

с окружностью C в тех же точках X и Y , что и прямая AB (черт. 153). Для построения ее центра строим точку M , симметричную центру C относительно прямой AB , и точку K , инверсную M . Точка K является центром окружности, инверсной прямой AB . Остается построить эту окружность (ее радиус — отрезок KC) и точки ее пересечения с данной окружностью.



Черт. 153

Данное построение, как легко убедиться, обосновано выше при решении задачи о построении окружности, проходящей через три данные точки. В случае, если центр окружности лежит на прямой AB , данное построение неприменимо.

ГЛАВА VIII

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

§ 54. Деление окружности на равные части

Для дуг одной и той же окружности в школьном курсе устанавливается понятие равенства и неравенства тем же способом, что и для отрезков. Для сравнения дуг мы можем «наложить» одну из них на другую, т. е. совершить движение, при котором одна из дуг отображается в другую или в ее часть. Такими движениями являются или поворот, центр которого совпадает с центром окружности, или отражение от оси, проходящей через центр окружности. Равенство дуг одной и той же окружности обладает всеми свойствами равенства фигур вообще (§ 8), неравенство этих дуг обладает свойствами неравенства отрезков (§ 8). Дуги одной и той же окружности мы можем складывать и вычитать.

На данной окружности мы можем построить дугу, равную данной. На основе этого можем построить дугу, кратную данной, т. е. представляющую сумму n (n — натуральное число) дуг, каждая из которых равна данной. Мы можем также разделить данную дугу пополам, т. е. построить ее

середину. Этим доказывается существование середины дуги. Отсюда следует, далее, существование точек на дуге, делящих ее на 2^n равных частей. Однако при помощи рассмотренных в главе II построений мы не можем доказать существование точек на дуге, делящих ее на произвольное число равных частей. Существование этих точек установим ниже.

Введем некоторые обозначения. Выражения

$$\cup AB = m \cup CD \text{ и } \cup CD = \frac{1}{m} \cup AB$$

обозначают, что дуга AB некоторой окружности представляет сумму m равных дуг той же окружности, каждая из которых равна дуге CD . Будем в этом случае говорить, что дуга AB является m -кратным дуги CD , а дуга CD — составляет $\frac{1}{m}$ часть дуги AB .

Выражение

$$\cup AB = \frac{m}{n} \cup CD$$

обозначает, что дуга AB представляет m -кратное $\frac{1}{n}$ дуги CD . Ту же дугу AB мы получим, если возьмем $\frac{1}{n}$ часть от $m \cup CD$, т. е. возьмем m -кратное дуги CD и от него возьмем $\frac{1}{n}$ часть. Для дуг, как и для отрезков, справедливы равенства (§ 29):

$$m \cup AB + n \cup AB = (m + n) \cup AB,$$

$$m (n \cup AB) = (mn) \cup AB,$$

$$k \left(\frac{m}{n} \cup AB \right) = \frac{mk}{n} \cup AB.$$

$$\frac{m}{n} \left(k \cup AB \right) = \frac{km}{n} \cup AB.$$

Т е о р е м а 1. *Каковы бы ни были две дуги одной и той же окружности, всегда найдется такое кратное меньшей дуги, которое превосходит большую* (предложение Архимеда для дуг).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\cup AB$ и $\cup CD$ — данные дуги, причем $\cup AB$ не превосходит полуокружность и $\cup CD < \cup AB$. Допустим, что n -кратное дуги CD не превосходит дугу AB при любом n . Тогда на дуге AB сущест-

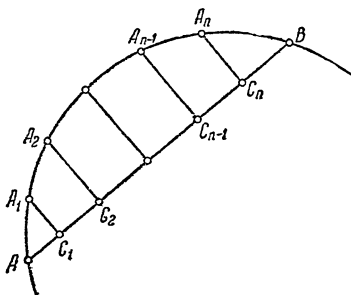
вуют точки A_1, A_2, \dots, A_n (в направлении от точки A к точке B) такие, что (черт. 154)

$$\cup AA_1 = \cup A_1 A_2 = \dots = \cup A_{n-1} A_n = \cup CD,$$

причем

$$\cup AA_n < \cup AB.$$

Пусть C_1, C_2, \dots, C_n — проекции точек A_1, A_2, \dots, A_n на хорду AB . Равные хорды $AA_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n$ неодинаково наклонены к хорде AB . Поэтому отрезки $AC_1, C_1 C_2, \dots$ не равны между собой. Очевидно, что наименьшим из них является отрезок AC_1 (доказательство этого предложения предоставляем читателю). Отсюда следует, что



Черт. 154

$$n \cdot AC_1 < AC_n,$$

а поэтому и подално

$$n \cdot AC_1 < AB$$

при любом n , что противоречит аксиоме Архимеда.

Полученное противоречие показывает ошибочность сделанного допущения, и этим устанавливается справедливость теоремы для рассмотренного случая.

Случай, когда $\cup AB$ превосходит полуокружность, легко сводится к рассмотренному.

Так как существуют точки, делящие любую дугу на 2^n равных частей, то из доказанной теоремы мы можем вывести такое следствие.

С л е д с т в и е. Какова бы ни была $\cup CD$, меньшая $\cup AB$, всегда найдется такое натуральное число m , для которого $\cup CD$ будет больше $\frac{1}{2^m}$ части $\cup AB$.

Пусть $\frac{1}{2^m}$ часть $\cup AB$ есть $\cup AA_1$. Если $\cup CD < \cup AA_1$ при любом m , то 2^m -кратное дуги CD меньше дуги AB . Так как 2^m при достаточно большом m больше любого натурального числа n , то отсюда следует, что n -кратное

дуги CD меньше дуги AB при любом n . Полученное противоречие с доказанной теоремой показывает справедливость высказанного следствия.

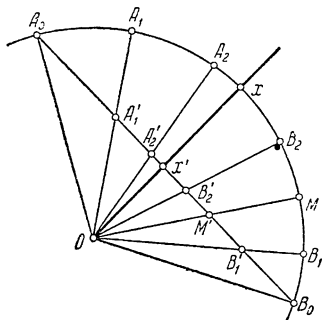
Установим теперь для последовательности дуг одной окружности предложение, аналогичное аксиоме Кантора (§ 33).

Теорема 2. Пусть имеется последовательность дуг $A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, \dots$, принадлежащих одной окружности и удовлетворяющих условиям:

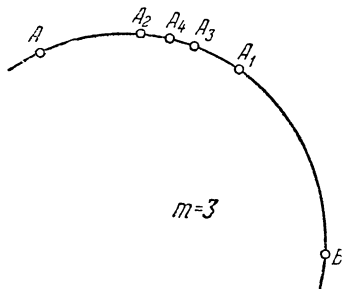
- 1) данная последовательность бесконечна;
- 2) все точки любой дуги A_kB_k принадлежат предыдущей дуге $A_{k-1}B_{k-1}$ данной последовательности;
- 3) не существует дуги, общей для всех дуг данной последовательности.

Тогда существует единственная точка, принадлежащая всем дугам данной последовательности.

Доказательство. Не нарушая общности доказательства, мы можем считать, что $\cup A_0B_0$ меньше полуокружности. Каждой точке M дуги A_0B_0 поставим в соответствие



Черт. 155



Черт. 156

ту точку хорды A_0B_0 , которая лежит на луче OM , исходящем из центра окружности (черт. 155). Этим мы установим взаимно однозначное соответствие между точками дуги A_0B_0 и хорды A_0B_0 .

Данной бесконечной последовательности дуг на хорде соответствует бесконечная последовательность вложенных отрезков

$$A_0B_0, A'_1B'_1, A'_2B'_2, \dots$$

Не существует отрезка $P'Q'$, общего для всех отрезков этой последовательности. Действительно, если бы таковой

существовал, то ему соответствовала бы дуга PQ , общая для всех дуг данной последовательности, что не имеет места по третьему условию.

В соответствии с аксиомой Кантора на хорде A_0B_0 существует единственная точка X' , общая для всех отрезков $A'_iB'_i$. Этой точке на дуге A_0B_0 соответствует точка X , общая для всех дуг данной последовательности. Другой такой точки Y не существует, так как тогда была бы дуга XY , общая для всех дуг данной последовательности, что невозможно по условию. Теорема доказана.

Перейдем теперь к решению поставленной в начале данного параграфа задачи.

Т е о р е м а 3. *Какова бы ни была дуга AB и каково бы ни было натуральное число m ($m > 2$), существует дуга CD той же окружности, такая, что $\cup AB = m \cup CD$.*

Таким образом, теорема утверждает, что любая дуга AB может быть разделена на любое число равных частей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как при $m = 2^n$ теорема справедлива, то в дальнейшем будем считать $m \neq 2^n$. Если возьмем дугу PQ , такую, что $\cup PQ = \frac{k}{2^n} \cup AB$ (k — натуральное число), то при таком m всегда

$$m \cup PQ \neq \cup AB,$$

так как всегда $\frac{mk}{2^n} \neq 1$.

Рассмотрим последовательность дуг, образованную следующим образом (черт. 156).

Разделим дугу AB точкой A_1 пополам и возьмем $\cup AA_1$ в качестве первой дуги последовательности. Так как $m > 2$, то

$$m \cup AA_1 > \cup AB.$$

Дугу AA_1 разделим точкой A_2 пополам. При

$$m \cup AA_2 < \cup AB$$

в качестве второй дуги последовательности берем $\cup A_2A_1$, если же

$$m \cup AA_2 > \cup AB,$$

то в качестве таковой берем $\cup AA_2$.

Положим, мы имеем первый случай. Вторую дугу последовательности, т. е. в данном случае $\cup A_2A_1$, разделим

пополам точкой A_3 . При $m \cup AA_3 < \cup AB$ в качестве третьей дуги последовательности берем $\cup A_3A_1$, а при $m \cup AA_3 > \cup AB$ берем в качестве таковой $\cup A_2A_3$. Пусть третьей дугой последовательности будет $\cup A_2A_3$.

Дугу A_2A_3 в свою очередь разделим точкой A_4 пополам и из полученных частей ее в качестве четвертого члена последовательности возьмем $\cup A_iA_j$ ($i = 2$ или 4 ; $j = 4$ или 3), такую, что

$$m \cup AA_i < \cup AB,$$

$$m \cup AA_j > \cup AB.$$

Будем продолжать подобным образом этот процесс неограниченно. Возможность этого обеспечена тем, что для любой точки деления A_k имеем:

$$m \cup AA_k \neq \cup AB,$$

так как из построения точки A_k следует, что

$$\cup AA_k = \frac{l}{2^k} \cup AB$$

(l — натуральное число).

На дуге AB мы получим бесконечную последовательность дуг, причем каждая дуга этой последовательности принадлежит предыдущей дуге. Дуга, являющаяся n -м членом данной последовательности, представляет $\frac{1}{2^n}$ часть дуги AB .

В силу следствия из теоремы 1 при достаточно большом n она будет меньше любой заданной дуги PQ . Отсюда следует, что не существует дуги PQ , общей для всех дуг данной последовательности.

Все условия теоремы 2 соблюдены. Следовательно, существует единственная точка X , общая для всех дуг рассматриваемой последовательности. Докажем, что

$$m \cup AX = \cup AB.$$

Пусть $\cup A_iA_n$ является n -м членом последовательности. Тогда:

$$m \cup AA_i < \cup AB,$$

$$m \cup AA_n > \cup AB$$

и

$$m \cup AA_i < m \cup AX < m \cup AA_n.$$

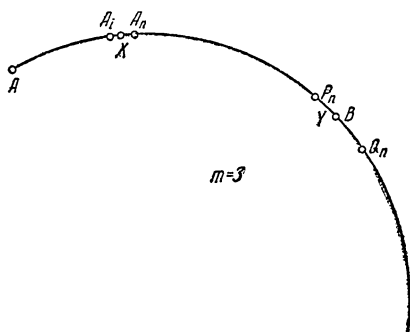
Так как

$$\cup A_i A_n = \frac{1}{2^n} \cup AB,$$

то

$$m \cup AA_n - m \cup AA_i = \frac{m}{n} \cup AB.$$

При неограниченном возрастании n дуга $\frac{1}{2^n} (m \cup AB)$ в силу следствия из теоремы 1 может стать сколь угодно малой (т. е. меньше любой заданной дуги). Отложим дуги $m \cup AA_i$, $m \cup AA_n$ и $m \cup AX$ на окружности от точки A



Черт. 157

по дуге AB . Пусть P_n , Q_n и Y — концы этих дуг соответственно (черт. 157). Тогда:

$$\cup AP_n < \cup AB, \cup AQ_n > \cup AB$$

и

$$\cup AP_n < \cup AY < \cup AQ_n,$$

причем

$$\cup Q_n P_n = \cup AQ_n - \cup AP_n = \frac{m}{2^n} \cup AB.$$

Точки B и Y принадлежат дуге $P_n Q_n$. Они совпадают, так как в противном случае

$$\cup BY < \cup P_n Q_n = \frac{1}{2^n} (m \cup AB)$$

при любом n , что невозможно.

Итак,

$$\cup AY = \cup AB,$$

т. е.

$$m \cup AX = \cup AB \text{ и } \cup AX = \frac{1}{m} \cup AB.$$

С л е д с т в и е. *Существуют точки на окружности, делящие ее на любое число равных между собой дуг.*

Этим самым доказано существование любого правильного m -угольника, вписанного в данную окружность.

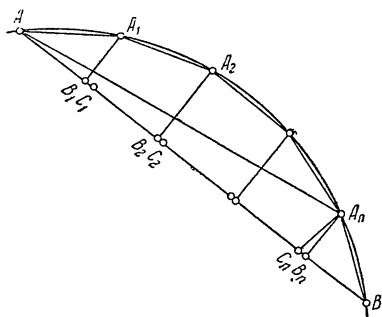
В силу имеющегося соответствия между дугами и центральными углами окружности отсюда также следует возможность деления произвольного угла на любое число равных частей.

§ 55. Правильные многоугольники

Дополним материал о правильных многоугольниках, известный из школьного курса, некоторыми новыми сведениями, необходимыми для выяснения понятия длины окружности.

Возьмем окружность радиуса R и рассмотрим правильные многоугольники, вписанные в эту окружность и описанные около нее. Пусть a_n и p_n — сторона и периметр правильного вписанного n -угольника, а b_n и q_n — сторона и периметр правильного описанного n -угольника.

Т е о р е м а 1. *Периметр правильного многоугольника, вписанного в данную окружность, растет с увеличением числа его сторон.*



Черт. 158

Надо доказать, что $p_n < p_{n+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть AB — сторона правильного вписанного n -угольника (черт. 158): $AB = a_n$. Следовательно, дуга AB является $\frac{1}{n}$ частью всей окружности.

Разделим ее точками A_1, A_2, \dots, A_n на $n+1$ равных частей; n таких частей дадут дугу AA_n , которая, как легко подсчитать, является $\frac{1}{n+1}$ частью окружности. Поэтому

хорда AA_n является стороной правильного вписанного $(n+1)$ -угольника, т. е. $AA_n = a_{n+1}$.

Пусть B_1, B_2, \dots, B_n — проекции точек A_1, A_2, \dots, A_n на хорду AB . Так как равные отрезки $AA_1, A_1A_2, \dots, A_nB$ неодинаково наклонены к хорде AB , то их проекции $AB_1, B_1B_2, \dots, B_nB$ не равны все между собой. Наименьшими из них будут AB_1 и B_nB . Поэтому хорда AB разделится точками B_1, B_2, \dots, B_n на $(n+1)$ неравных частей, и B_nB будет меньше $\frac{1}{n+1} AB$.

Разделим теперь хорду AB точками C_1, C_2, \dots, C_n на $(n+1)$ равных частей. Тогда

$$C_nB = \frac{1}{n+1} AB$$

и поэтому

$$C_nB > B_nB,$$

значит,

$$AC_n < AB_n.$$

Отсюда следует, что в треугольнике AA_nC_n угол при вершине C_n — тупой, и поэтому

$$AA_n > AC_n.$$

Так как

$$AA_n = a_{n+1}, \quad AC_n = \frac{n}{n+1} a_n,$$

то

$$a_{n+1} > \frac{n}{n+1} a_n,$$

или

$$(n+1) a_{n+1} > n a_n,$$

т. е.

$$p_{n+1} > p_n,$$

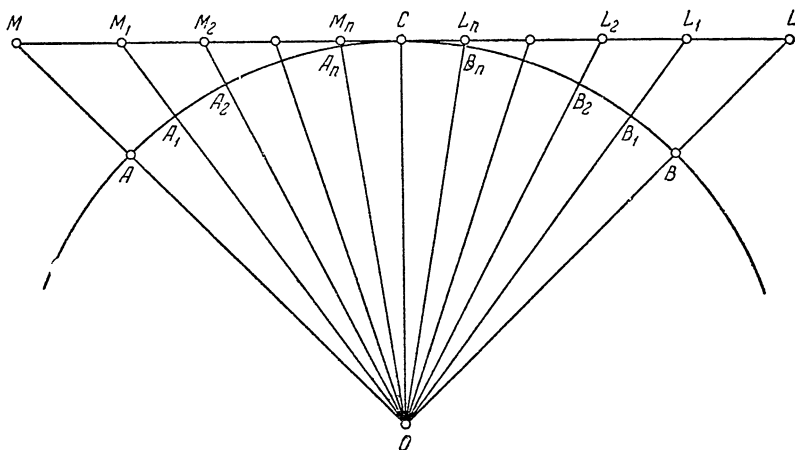
что и требовалось установить.

Т е о р е м а 2. *Периметр правильного многоугольника, описанного около данной окружности, убывает с возрастанием числа его сторон.*

Нам надо доказать, что $q_n > q_{n+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ML = b_n$ — сторона правильного описанного n -угольника, C — точка, в которой

она касается окружности (черт. 159). Соединим центр окружности O с точками M и L . Пусть A и B — точки пересечения прямых OM и OL с окружностью. Дуга ACB составляет $\frac{1}{n}$



Черт. 159

часть окружности, причем $\cup AC = \cup CB$. Разделим на $(n + 1)$ равных частей дугу AC точками A_1, A_2, \dots, A_n (идя от точки A к точке C) и дугу BC точками B_1, B_2, \dots, B_n (идя от точки B к точке C). Прямые OA_1, OA_2, \dots, OA_n разделяют отрезок MC точками M_1, M_2, \dots, M_n соответственно на $n + 1$ неравных частей, прямые OB_1, OB_2, \dots, OB_n разделяют точками L_1, L_2, \dots, L_n отрезок LC на такие же части.

По свойству наклонных, проведенных к прямой из одной точки, имеем:

$$OM > OM_1 > OM_2 > \dots > OM_n > OC.$$

Так как отрезок OM_1 является биссектрисой $\triangle MOM_2$, то

$$MM_1 > M_1M_2.$$

Из $\triangle M_1OM_3$, для которого отрезок OM_2 является биссектрисой, находим:

$$M_1M_2 > M_2M_3.$$

Таким же путем установим неравенства для остальных отрезков.

Итак, имеем:

$$MM_1 > M_1M_2 > M_2M_3 > \dots > M_nC.$$

Отсюда следует, что

$$MM_1 > \frac{1}{n+1} MC.$$

Далее, получим:

$$CM_1 = CM - MM_1 < CM - \frac{1}{n+1} CM = \frac{n}{n+1} CM.$$

Так как $CM_1 = CL_1$ и $CM = CL$, то отсюда получим:

$$M_1L_1 < \frac{n}{n+1} ML.$$

Легко подсчитать, что дуга A_1B_1 составляет $\frac{1}{n+1}$ часть окружности. Поэтому $M_1L_1 = b_{n+1}$ — сторона правильного описанного $(n+1)$ -угольника, и полученное неравенство можно записать так:

$$b_{n+1} < \frac{n}{n+1} b_n,$$

или

$$(n+1) b_{n+1} < n b_n,$$

т. е.

$$q_{n+1} < q_n.$$

§ 56. Длина окружности

Для данной окружности мы имеем две последовательности: монотонно возрастающую последовательность длин периметров правильных вписанных многоугольников

$$p_3, p_4, p_5, \dots, p_n, \dots \quad (1)$$

и монотонно убывающую последовательность длин периметров правильных описанных многоугольников

$$q_3, q_4, q_5, \dots, q_n, \dots \quad (2)$$

Так как периметры одноименных правильных многоугольников относятся как их апофемы, то

$$\frac{q_n}{p_n} = \frac{R}{k_n} > 1$$

(k_n — апофема правильного вписанного многоугольника).

Отсюда:

$$q_n > p_n.$$

Но

$$q_n < q_{n-1} < \dots < q_3.$$

Следовательно, при любом n

$$p_n < q_3.$$

Бесконечная монотонно возрастающая последовательность (1) ограничена сверху. Поэтому (см. курс анализа) она имеет предел, который обозначим буквой c :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = c.$$

Полученное число c принимается за длину данной окружности.

Итак, *длиной окружности* называется предел бесконечной возрастающей последовательности длин периметров правильных многоугольников, вписанных в эту окружность.

Так как

$$p_n < c, \text{ то } a_n < \frac{c}{n}.$$

Отсюда заключаем, что при неограниченном возрастании n сторона a_n может стать сколь угодно малой. Следовательно, последовательность

$$a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$$

имеет пределом нуль:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Как известно из школьного курса (см. учебник Киселева ч. 1, § 263), отсюда вытекает, что последовательность апофем правильных вписанных многоугольников

$$k_3, k_4, k_5, \dots, k_n, \dots \quad (3)$$

сходится, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = R.$$

Рассмотрим теперь последовательность длин периметров правильных описанных многоугольников (2). Так как

$$q_n > p_n,$$

то и подавно при любом n $q_n > p_3$.

Следовательно, последовательность (2) ограничена снизу. Так как, кроме того, эта последовательность монотонно убывающая, то она сходящаяся. Последовательности 1, 2 и 3 связаны равенством:

$$q_n = \frac{R p_n}{\kappa_n}.$$

В силу известных теорем о пределах имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = R \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} p_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n} = R \frac{c}{R} = c.$$

Мы доказали теорему: *Длина окружности равна пределу бесконечной монотонно убывающей последовательности длин периметров правильных многоугольников, описанных около этой окружности.*

Таким образом, последовательности 1 и 2 можно рассматривать как последовательности приближенных значений длины окружности с недостатком (1) и с избытком (2).

Разделив все члены последовательности 1 и 2 на длину диаметра окружности, получим две новые последовательности:

$$u_3, u_4, u_5, \dots, u_n, \dots, \quad (4)$$

$$v_3, v_4, v_5, \dots, v_n, \dots, \quad (5)$$

где

$$u_n = \frac{p_n}{2R} \quad \text{и} \quad v_n = \frac{q_n}{2R}.$$

Общим пределом этих двух последовательностей будет $\frac{c}{2R}$.

Если мы изменим радиус окружности, то изменятся и периметры p_n и q_n , но отношение их к диаметру останется прежним. Действительно, если новый радиус окружности будет R' , а периметры правильных вписанных и описанных многоугольников, будут p'_n и q'_n , то из свойства подобия правильных многоугольников заключаем, что

$$\frac{p_n}{R} = \frac{p'_n}{R'} \quad \text{и} \quad \frac{q'_n}{R'} = \frac{q_n}{R},$$

или

$$\frac{p_n}{2R} = \frac{p'_n}{2R'} \quad \text{и} \quad \frac{q'_n}{2R'} = \frac{q_n}{2R}.$$

Следовательно, общий предел последовательностей 4 и 5 не зависит от диаметра окружности, т. е. он будет один и тот же для всех окружностей. Этот предел обозначается буквой π . Итак, $\pi = \frac{c}{2R}$.

Отсюда получим, формулу для длины окружности: $c = 2\pi R$, или $c = \pi D$, где D — диаметр окружности.

Последовательности 4 и 5 можно рассматривать как последовательности приближенных значений числа π с недостатком (4) и с избытком (5).

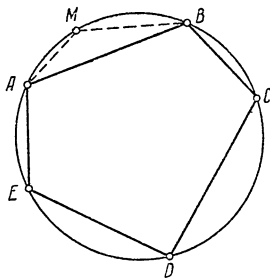
Вопрос о нахождении числа π при помощи этих последовательностей и формулы удвоения числа сторон правильного многоугольника рассмотрены в школьном курсе. При этом мы, например, последовательно находим периметры p_6, p_{12}, p_{24} и т. д., что дает значение π с недостатком. Найдя a_n , легко найти k_n , а затем $q_n = \frac{R}{k_n} p_n$. Этим мы определим значение π с избытком.

Теорема. *Периметр любого выпуклого многоугольника, вписанного в окружность, меньше длины данной окружности, а периметр любого описанного около этой окружности многоугольника больше ее длины.*

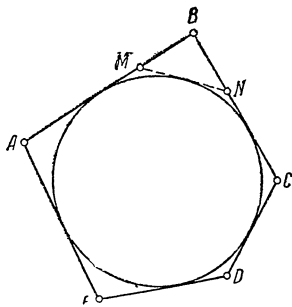
Начнем доказательство со следующих замечаний:

1) каков бы ни был вписанный многоугольник, можно вписать в ту же окружность другой многоугольник с большим периметром;

2) каков бы ни был описанный многоугольник, можно описать около той же окружности многоугольник с меньшим периметром.



Черт. 160



Черт. 161

Справедливость их легко установить из чертежей 160 и 161, сравнивая вписанные многоугольники $ABCDE$ и $AMBCDE$ и описанные многоугольники $ABCDE$ и $AMNCDE$.

Будем в дальнейшем опираться на известную из школьного курса лемму о периметре многоугольника, объемлющего выпуклый многоугольник.

Пусть p — периметр некоторого вписанного выпуклого многоугольника. По лемме он меньше периметра правильного описанного n -угольника.

$$p < q_n.$$

Каждый член последовательности (2) больше p . Поэтому предел ее c будет или больше p , или равняться p :

$$p \leq c.$$

Периметр любого вписанного многоугольника не превосходит длины окружности. Если возьмем другой вписанный многоугольник с периметром $p' > p$, то для него имеем то же соотношение:

$$p' \leq c,$$

отсюда:

$$p < c.$$

Если q — периметр некоторого описанного многоугольника, то по лемме каждый член последовательности (1)

$$p_n < q.$$

Отсюда:

$$c \leq q.$$

Длина окружности c не превосходит периметра любого описанного многоугольника. Если возьмем другой описанный многоугольник с периметром $q' < q$, то $c \leq q'$. Отсюда имеем: $c < q$.

§ 57. Спрявление окружности. Длина дуги

При определении длины окружности мы взяли последовательности правильных вписанных и описанных n -угольников (§ 56). Из рассматриваемых там последовательностей 1 и 2 выделим последовательности:

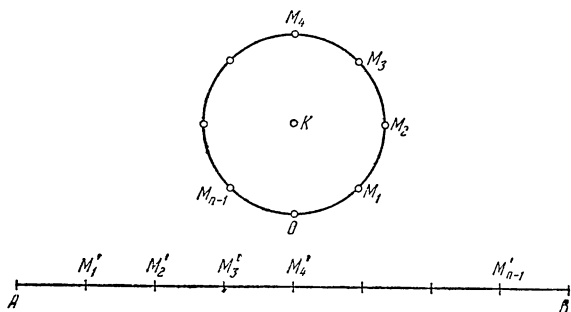
$$p_4, p_8, p_{16}, \dots, \quad (1 \text{ а})$$

$$q_4, q_8, q_{16}, \dots \quad (2 \text{ а})$$

Первыми членами их являются периметры правильных четырехугольников. Каждый следующий член этих последовательностей представляет собой периметр правильного многоугольника с числом сторон вдвое большим, чем число сторон предшествующего ему многоугольника. Обе эти последовательности имеют один и тот же общий предел c , причем сторона многоугольника при неограниченном удвоении числа сторон его может стать сколь угодно малой.

Пользуясь правильными 2^n -угольниками и доказанной в § 51 теоремой 2, мы можем установить взаимно однозначное соответствие между точками окружности и точками отрезка AB , длина которого равна найденному выше пределу c .

Возьмем для этого окружность K и отрезок $AB = c$ (черт. 162). Возьмем на окружности точку O и будем отсчитывать от нее дуги в каком-либо одном направлении (например, в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки). Разделим окружность на 2^n рав-



Черт. 162

ных дуг так, чтобы точка O являлась концом одной из этих дуг, и перенумеруем точки деления по порядку от точки O в выбранном направлении. Отрезок AB тоже разделим на 2^n частей и точки деления перенумеруем по порядку от точки A к B .

Каждой точке M_i окружности поставим в соответствие точку M'_i отрезка. Таким путем бесконечному множеству точек окружности, являющихся вершинами правильного 2^n -угольника, поставим в соответствие бесконечное множество точек отрезка AB , являющихся точками деления его на 2^n равных частей. При этом точке окруж-

ности, более удаленной от выбранного начала O , будет соответствовать точка отрезка, более удаленная от точки A . Будем считать, что дуге $M_i M_{i+1}$, являющейся $\frac{1}{2^n}$ частью окружности, соответствует отрезок $M'_i M'_{i+1}$, являющийся $\frac{1}{2^n}$ частью отрезка AB .

Произвольной точке X окружности поставим в соответствие точку X' отрезка AB таким образом, чтобы при любом n точка X' принадлежала отрезку $M'_i M'_{i+1}$, соответствующему дуге $M_i M_{i+1}$, которой принадлежит точка X . Из аксиомы Кантора следует, что такая точка X' существует и притом только одна.

В силу следствия из предложения Архимеда для дуг (§ 54) при достаточно большом n две различные точки окружности X и Y не могут принадлежать одной и той же дуге $M_i M_{i+1}$. Отсюда следует, что различным точкам окружности соответствуют различные точки на отрезке AB .

Опираясь на теорему 2 из § 54, можно доказать, что любая точка отрезка AB соответствует определенной точке окружности.

Таким образом, мы установили преобразование Θ , при котором окружность K отображается в отрезок AB .

Будем говорить также, что окружность K спрямлена в отрезок AB .

Для преобразования Θ существует взаимно обратное преобразование Θ^{-1} , при котором отрезок AB отображается в окружность K . При этом мы должны отметить одно исключение: мы должны считать концы отрезка A и B соответствующими одной точке окружности O .

Можно, далее, показать, что при преобразованиях Θ и Θ^{-1} равным дугам окружности соответствуют равные отрезки на прямой AB , и наоборот (доказательство этого предложения опускаем).

Дадим теперь определение длины дуги. Длиной дуги окружности K называется длина отрезка, соответствующего этой дуге при указанном отображении окружности на отрезок AB .

Можно показать, что определенные таким способом длины дуг одной и той же окружности имеют следующие свойства:

- 1) *равные дуги имеют равные длины;*
- 2) *если дуга представляет сумму двух дуг, то ее длина равна сумме длин слагаемых дуг.* В частности, отсюда сле-

дует, что *длина окружности равна сумме длин дуг, на которые она разделена.*

Как было доказано, длина окружности $s = 2\pi R$. Примем радиус за единицу длины. В этом случае длина дуги называется ее радианной мерой. Если радианная мера дуги равна a , то длина соответствующего ей отрезка будет тоже a , при условии, что за единицу длины принят радиус окружности. Если теперь возьмем другую единицу длины, при которой длина радиуса равна R , то по теореме о переходе от одной единицы измерения к другой (§ 32) длина дуги будет aR .

Длина дуги равна произведению радиуса на ее радианную меру:

$$s = aR.$$

Длина дуги может быть определена также следующим способом.

Назовем простую ломаную правильной, если все ее стороны равны и вершины принадлежат одной окружности. Правильная ломаная считается вписанной в ту дугу окружности, концы которой совпадают с концами ломаной и которая содержит все вершины ее.

Тем же путем, что и для правильных многоугольников, можно построить бесконечную последовательность длин периметров правильных ломаных, вписанных в дугу окружности и доказать существование предела этой последовательности. Этот предел принимается за длину данной дуги.

Можно показать эквивалентность обоих определений. Это значит, что оба способа определения длины дуги дадут одно и то же число при данной единице измерения.

Г Л А В А IX

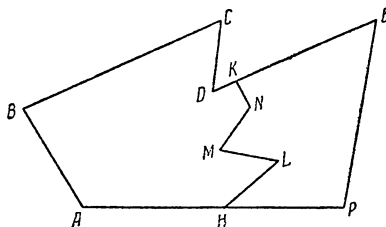
ПЛОЩАДИ

§ 58. Равносоставленные многоугольники

Пусть дан многоугольник F . Соединим точки H и K , принадлежащие контуру его простой ломаной, все точки которой, исключая ее концы, лежат внутри этого многоугольника. В результате мы получим два многоугольника F_1 и F_2 , имеющих общую частью указанную ломаную (черт. 163). Множество точек, принадлежащих многоугольнику F , представляет соединение множеств точек многоугольников F_1 и

F_2 . Поэтому мы скажем, что многоугольник F разложен на многоугольники F_1 и F_2 , и условно запишем это так:

$$F \sim F_1 + F_2.$$



Черт. 163

В свою очередь каждый из многоугольников F_1 и F_2 можно разложить на два новых многоугольника и т. д.

Таким путем мы можем получить некоторые многоугольники Q_1, Q_2, \dots, Q_k , соединение множеств точек которых даст нам множество точек прямоугольника F . Ясно при этом, что любые два многоугольника Q_i и Q_j или не имеют общих точек, или общие точки этих многоугольников принадлежат их контурам. Будем говорить в этом случае, что многоугольник F разложен на многоугольники Q_1, Q_2, \dots, Q_k и условно писать:

$$F \sim Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k.$$

Будем говорить, что многоугольник F представляет соединение многоугольников Q_1, Q_2, \dots, Q_k .

Два многоугольника F_1 и F_2 называются *равносоставленными*, если каждый из них можно разложить на одно и то же конечное число многоугольников так, что каждому многоугольнику одного разложения соответствует равный ему многоугольник другого разложения, и обратно.

Из определения следует, что равносоставленность многоугольников обладает свойством симметрии.

Т е о р е м а 1. *Два многоугольника, равносоставленные с третьим, равносоставлены между собой.*

Пусть F_1, F_2 и F_3 — данные многоугольники (черт. 164), причем

$$F_1 \text{ равносоставлен с } F_2$$

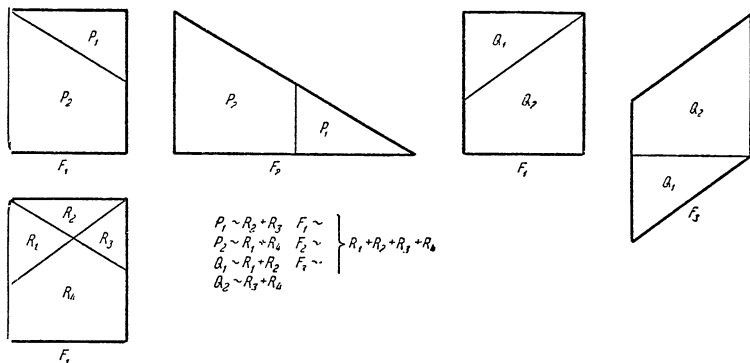
и

$$F_2 \text{ равносоставлен с } F_3.$$

Нам надо доказать, что

F_2 равносоставлен с F_3 .

По условию F_1 и F_2 разлагаются на многоугольники P_1, P_2, \dots, P_k ¹⁾:



Черт 164

$$F_1 \sim P_1 + P_2 + \dots + P_k,$$

$$F_2 \sim P_1 + P_2 + \dots + P_k.$$

В то же время F_1 и F_3 разлагаются на многоугольники Q_1, Q_2, \dots, Q_m :

$$F_1 \sim Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m,$$

$$F_3 \sim Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m.$$

Многоугольник F_1 разлагается на составляющие его многоугольники двумя способами. Совокупность ломаных, проводимых при одном и при другом способах, даст третье разложение многоугольника F_1 на некоторые многоугольники R_1, R_2, \dots, R_n . Каждый из многоугольников P_i или Q_j при этом окажется соединением некоторого числа многоугольников R_t . Поэтому многоугольники F_2 и F_3 разлагаются на одни и те же многоугольники R_1, R_2, \dots, R_n :

$$F_2 \sim R_1 + R_2 + \dots + R_n,$$

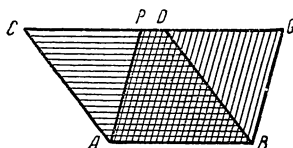
$$F_3 \sim R_1 + R_2 + \dots + R_n,$$

т. е. F_2 и F_3 — равносоставленные многоугольники.

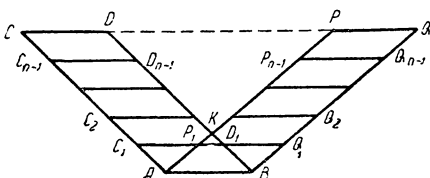
¹⁾ Равные многоугольники обозначаем одним символом.

Теорема 2. Два параллелограмма, имеющие равные основания и равные высоты, равносоставлены.

Пусть F_1 и F_2 — два таких параллелограмма (черт. 165 и 166). Путем перемещения одного из них расположим параллелограммы F_1 и F_2 так, чтобы они имели общее основание AB и принадлежали одной полуплоскости, ограниченной прямой AB .



Черт. 165



Черт. 166

Один из них займет положение $ACDB$, а другой $APQB$; стороны CD и PQ окажутся на прямой, параллельной общему основанию AB . Возможны два случая:

1. AP не пересекает BD . В этом случае

$$\square ABDC \sim \triangle ACP + \square APDB$$

и

$$\square APQB \sim \triangle BDQ + \square APDB.$$

Как легко видеть, $\triangle ACP = \triangle QBD$. Теорема очевидна.

2. AP пересекает BD в некоторой точке K . Разделим BD на n равных частей так, чтобы

$$BK > \frac{BD}{n},$$

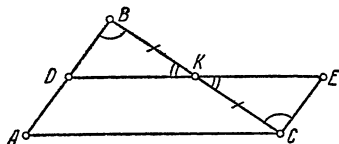
что в силу аксиомы Архимеда всегда возможно. Проводя через точки деления прямые, параллельные AB , каждый из данных параллелограммов мы разделим на n равных частей, каждая из которых будет тоже параллелограммом. Рассмотрим две такие части, входящие в разные параллелограммы и имеющие общую сторону AB (параллелограммы AC_1D_1B и AP_1Q_1B). Они удовлетворяют условиям первого случая и поэтому равносоставлены. Отсюда вытекает равносоставленность данных параллелограммов.

Теорема 3. Треугольник равносоставлен с параллелограммом, у которого основание совпадает с одной из сторон треугольника, а высота равна половине соответствующей высоты треугольника.

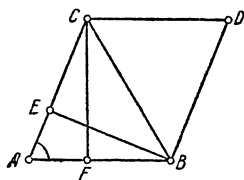
Доказательство легко усматривается из чертежа 167, где $BK = KC$, $DE \parallel AC$ и $EC \parallel AB$.

Следствие 1. *Треугольник равносоставлен с прямоугольником, у которого одна из сторон — сторона треугольника, а другая равна половине соответствующей высоты треугольника.*

Следствие 2. *Два треугольника с равными основаниями и равными высотами равносоставлены.*



Черт. 167



Черт. 168

Лемма. *В параллелограмме произведение стороны на соответствующую высоту не зависит от выбора стороны.*

Проведем в параллелограмме $ACDB$ высоты CF и BE (черт. 168). Так как $\triangle CAF \sim \triangle BAE$,

то
$$\frac{AC}{CF} = \frac{AB}{BE},$$

или $AC \cdot BE = AB \cdot CF$, что и требовалось установить.

Теорема 4. *Если в двух прямоугольниках произведение двух смежных сторон одного равно произведению двух смежных сторон другого, то эти прямоугольники равносоставлены.*

Если a и b — смежные стороны одного прямоугольника, а c и d — другого, то по условию

$$ab = cd.$$

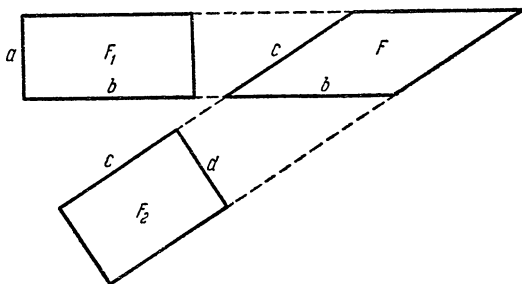
Пусть $a < c$. Построим параллелограмм F по основанию b , высоте a и боковой стороне c , что всегда возможно (чертеж 169). Если x — высота параллелограмма F , соответствующая стороне c , то по лемме имеем:

$$cx = ab.$$

Сравнивая с данным условием, получаем, что $x = d$.

По теореме 2 параллелограмм F равносоставлен как с первым прямоугольником, так и со вторым. Из теоремы 1 следует, что данные прямоугольники равносоставлены.

Легко разложить выпуклый многоугольник на треугольники. Можно показать, что любой невыпуклый многоугольник можно тоже разложить на треугольники. Основываясь на этом, докажем следующую теорему.



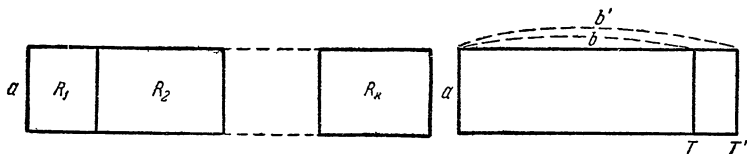
Черт. 169

Теорема 5. *Всякий многоугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

Пусть данный многоугольник F разложен на треугольники P_1, P_2, \dots, P_k :

$$F \sim P_1 + P_2 + \dots + P_k.$$

Каждый треугольник P_i равносоставлен с некоторым прямоугольником Q_i . Возьмем определенный отрезок a . По теореме 4 для каждого прямоугольника Q_i можно подобрать такой прямоугольник R_i , который будет с ним равносоставлен и иметь одну из сторон, равную отрезку a .



Черт. 170

Черт. 171

Построим, далее, прямоугольник T со стороной a , являющийся соединением прямоугольников R_i (черт. 170). Так как прямоугольник R_i равносоставлен с треугольником P_i , то в конечном счете прямоугольник T равносоставлен с данным многоугольником F .

Встает вопрос: не можем ли мы получить другой прямоугольник T' с той же стороной a , не равный прямоуголь-

нику T и в то же время равносоставленный с многоугольником F ? Если это возможно, то прямоугольники T и T' равносоставлены. Так как они имеют равные стороны, то путем перемещения одного из них мы сможем расположить данные прямоугольники так, что будем иметь два равносоставленных многоугольника, из которых один является частью другого (черт. 171).

Опыт подсказывает, что такое положение невозможно. Поэтому примем следующую аксиому, необходимую для дальнейшего.

А к с и о м а (аксиома де-Цольта). *Многоугольник не может быть равносоставлен со своей частью.*

Опираясь на эту аксиому, мы можем утверждать, что для каждого многоугольника F существует единственный прямоугольник T , равносоставленный с ним и имеющий сторону, равную заданному отрезку a .

Т е о р е м а 6. *Произведения смежных сторон двух равносоставленных прямоугольников равны между собой.*

Действительно, пусть a и b — смежные стороны прямоугольника F_1 , а c и d — смежные стороны равносоставленного с ним прямоугольника F_2 . Если $ab > cd$, то найдется такое $b' < b$, что $ab' = cd$. Тогда прямоугольник F_3 со сторонами a и b' равносоставлен с прямоугольником F_2 , а значит, и с прямоугольником F_1 , что противоречит аксиоме де-Цольта.

Таким образом, все прямоугольники, равносоставленные с данным многоугольником F , имеют одно и то же произведение смежных сторон. С каждым многоугольником при выбранной единице измерения отрезков оказывается связанным определенное положительное действительное число, равное произведению длин смежных сторон равносоставленного с ним прямоугольника. Это число мы назовем временно *характеристикой* данного многоугольника.

§ 59. Измерение площадей многоугольников

Мы допускаем, что каждому многоугольнику можно поставить в соответствие положительное действительное число, так что выполняются следующие условия:

- 1) равным многоугольникам соответствуют равные числа;
- 2) если многоугольник F представляет соединение двух многоугольников F_1 и F_2 , то ему соответствует число, равное сумме чисел, соответствующих многоугольникам F_1 и F_2 ;

3) квадрату, сторона которого является единицей длины, соответствует число один (единичный квадрат).

Число, соответствующее при этих условиях многоугольнику F , называется его площадью (пл. F).

Покажем, что введенная в конце § 58 характеристика многоугольника отвечает всем трем условиям.

1. Равные многоугольники равносоставлены с одним и тем же прямоугольником. Значит, их характеристики равны.

2. Пусть многоугольник F является соединением многоугольников F_1 и F_2 . Пусть k , k_1 и k_2 — их характеристики. Возьмем некоторый отрезок a . Многоугольникам F_1 и F_2 соответствуют равносоставленные с ними прямоугольники T_1 и T_2 , имеющие отрезок a в качестве одной из своих сторон. Вторые их стороны b_1 и b_2 определяются равенствами:

$$b_1 = \frac{k_1}{a} \text{ и } b_2 = \frac{k_2}{a}.$$

Соединяя прямоугольники T_1 и T_2 , получим прямоугольник $T \sim T_1 + T_2$. Очевидно, что прямоугольник T равносоставлен с многоугольником F ; стороны его будут a и $b = b_1 + b_2$. Следовательно, характеристика многоугольника F будет:

$$k = ab = a \left(\frac{k_1}{a} + \frac{k_2}{a} \right) = k_1 + k_2.$$

Если многоугольник F является соединением многоугольников F_1 и F_2 , то его характеристика равна сумме характеристик этих многоугольников.

3. Очевидно, что характеристика единичного квадрата равна единице.

В силу сказанного выше характеристика многоугольника является его площадью.

Каков же геометрический смысл площади многоугольника? Пусть пл. $F = k$. Возьмем прямоугольник T со сторонами 1 и k (k — рациональное число). Так как произведение смежных сторон этого прямоугольника равно k , т. е. характеристике F , то он равносоставлен с многоугольником F . Число k нам показывает, сколько надо взять единичных квадратов (целая часть k) и какую, кроме того, долю единичного квадрата (дробная часть k), чтобы из них путем разрезания на куски и перекладывания этих кусков мы могли получить данный многоугольник F . Если, например, площадь многоугольника равна $2\frac{2}{3}$, то для получения его

указанным способом потребуются два единичных квадрата и прямоугольник со сторонами 1 и $\frac{2}{3}$ ($\frac{2}{3}$ единичного квадрата).

К трем основным условиям добавим следующие очевидные следствия из них.

4. Если многоугольник F представляет соединение многоугольников F_1, F_2, \dots, F_k , то

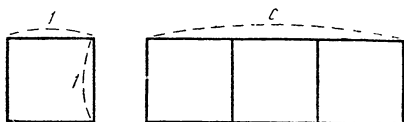
$$\text{пл. } F = \text{пл. } F_1 + \dots + \text{пл. } F_k.$$

5. Если многоугольник F представляет правильную часть многоугольника Φ , то $\text{пл. } F < \text{пл. } \Phi$.

6. Равносоставленные многоугольники имеют равные площади.

Докажем теперь, что при определенной единице длины можно установить систему измерения площадей многоугольников только одним способом. Мы должны, следовательно, доказать, что если каким-либо образом мы поставим в соответствие каждому многоугольнику положительное действительное число так, что выполняются условия 1—3, то эти числа являются характеристиками соответствующих многоугольников.

Нам, очевидно, достаточно для этого доказать, что площадью прямоугольника может быть только произведение его сторон.



Черт. 172

Отсюда уже вытекает, что площадью любого многоугольника может являться только его характеристика.

Рассмотрим сначала прямоугольник T со сторонами 1 и c .

а) c — целое число (черт. 172). Такой прямоугольник легко разложить на c единичных квадратов. Площадь каждого из них равна 1 (условия 1 и 3). По свойству 4 имеем:

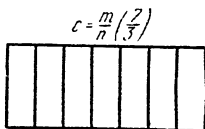
$$\text{пл. } T = 1 + 1 + \dots + 1 = c;$$

б) c — рациональное число. Пусть $c = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа (черт. 173).

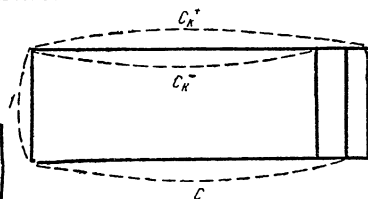
Разобьем единичный квадрат на n равных прямоугольников прямыми, параллельными одной из его сторон. Так как $c = \frac{m}{n}$, то прямоугольник T мы можем разложить на m таких же равных между собой прямоугольников. Пусть x — площадь каждого из этих прямоугольников. Тогда по свойству 4 площадь единичного квадрата равна nx , а пл. $T = mx$. По условию 3: $nx = 1$. Отсюда $x = \frac{1}{n}$ и

$$\text{пл. } T = mx = \frac{m}{n} = c;$$

в) c — иррациональное число.



Черт. 173



Черт. 174

Пусть c_k^- и c_k^+ — приближенные значения c с точностью до $\frac{1}{10^k}$ соответственно с недостатком и с избытком:

$$c_k^- < c < c_k^+, \text{ где } c_k^+ - c_k^- = \frac{1}{10^k}.$$

Возьмем прямоугольник T_1 со сторонами 1 и c_k^- и прямоугольник T_2 со сторонами 1 и c_k^+ (черт. 174).

Так как T_1 является частью прямоугольника T , а последний — частью прямоугольника T_2 , то по свойству 5:

$$\text{пл. } T_1 < \text{пл. } T < \text{пл. } T_2.$$

Так как c_k^- и c_k^+ — рациональные числа, то по доказанному выше:

$$\text{пл. } T_1 = c_k^-, \text{ пл. } T_2 = c_k^+.$$

Отсюда при любом k $c_k^- < \text{пл. } T < c_k^+$.

Следовательно,

$$\text{пл. } T = c.$$

Итак, площадью прямоугольника со сторонами 1 и c может быть только число c .

Рассмотрим теперь прямоугольник со сторонами a и b . Если $c = ab$, то данный прямоугольник равноставлен с прямоугольником, стороны которого 1 и c . Как только что мы показали, площадью последнего прямоугольника может быть только число c .

По свойству 6 площадью данного прямоугольника может быть только то же самое число c , равное произведению его сторон a и b . Этим доказано высказанное выше утверждение.

Установив, что площадь прямоугольника равна произведению его двух смежных сторон, мы можем найти площадь любого многоугольника. Для этого нам надо воспользоваться теоремами о равноставленности многоугольников. Пользуясь ими, легко получим известные формулы для площади параллелограмма, треугольника, трапеции и других многоугольников.

Многоугольники, имеющие равные площади, называются *равновеликими*. Из свойства 6 следует, что равноставленные многоугольники являются равновеликими. Покажем, что справедливо обратное предложение: *равновеликие многоугольники равноставлены* (теорема Б о л ь я и—Г е р в и н а).

Пусть многоугольники F_1 и F_2 равновелики:

$$\text{пл. } F_1 = \text{пл. } F_2.$$

Многоугольник F_1 равноставлен с некоторым прямоугольником T_1 , а многоугольник F_2 — с прямоугольником T_2 . Следовательно,

$$\text{пл. } F_1 = \text{пл. } T_1 = a_1 b_1,$$

$$\text{пл. } F_2 = \text{пл. } T_2 = a_2 b_2,$$

где a_1 , b_1 и a_2 , b_2 — смежные стороны прямоугольников T_1 и T_2 . По условию

$$a_1 b_1 = a_2 b_2.$$

Следовательно, прямоугольники T_1 и T_2 равноставлены. Отсюда вытекает равноставленность многоугольников F_1 и F_2 (§ 58).

§ 60. Площадь круга

Как и в § 56, построим последовательность правильных вписанных в данную окружность и описанных около нее многоугольников. С возрастанием числа сторон периметр

и апофема вписанного правильного многоугольника возрастают, периметр описанного правильного многоугольника убывает, а апофема последнего (радиус окружности) остается постоянной. Отсюда следует, что последовательность

$$S_3, S_4, \dots, S_n, \dots, \quad (1)$$

где $S_n = \frac{p_n k_n}{2}$ — площадь правильного вписанного n -угольника, монотонно возрастает, а последовательность

$$T_3, T_4, \dots, T_n, \dots, \quad (2)$$

где $T_n = \frac{q_n R}{2}$ — площадь правильного описанного n -угольника, монотонно убывает. Так как при этом $T_n > S_n$, то каждая из этих последовательностей является сходящейся. Пользуясь теоремами о пределах последовательностей, получим (§ 56):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n k_n}{2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \frac{1}{2} cR,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q_n R}{2} \right) = \frac{R}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{2} cR,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{2} cR = \frac{R}{2} (2\pi R) = \pi R^2.$$

Пусть F — произвольный вписанный многоугольник. Так как он является частью любого описанного многоугольника, то

$$\text{пл. } F < T_n.$$

Отсюда следует, что

$$\text{пл. } F \leq \lim T_n,$$

т. е.

$$\text{пл. } F \leq \pi R^2.$$

Построим вписанный многоугольник F' такой, что

$$\text{пл. } F' > \text{пл. } F.$$

(Способ построения многоугольника F' ясен из чертежа 160.) По доказанному:

$$\text{пл. } F' \leq \pi R^2.$$

Отсюда

$$\text{пл. } F < \pi R^2.$$

Аналогичным путем докажем, что площадь любого описанного многоугольника больше πR^2 . Мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Последовательность площадей правильных вписанных в окружность радиуса R многоугольников и последовательность площадей правильных описанных около нее многоугольников при неограниченном возрастании числа их сторон сходятся к общему пределу πR^2 , который больше площади любого вписанного многоугольника, но меньше площади любого описанного многоугольника.*

Этот предел называется *площадью круга* радиуса R .

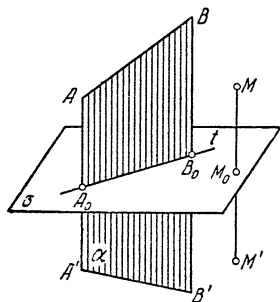
Из данного определения следует, что площадь круга равна $\frac{1}{2} cR$, где c — длина окружности, ограничивающей данный круг.

Г Л А В А X

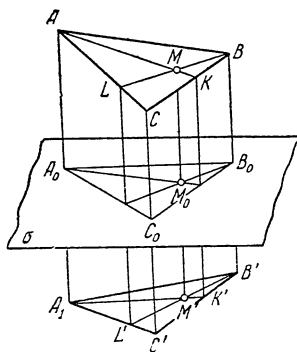
ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 61. Отражение от плоскости

В дальнейшем мы опираемся на материал о взаимном расположении прямых и плоскостей, известный из школьного курса.



Черт. 175



Черт. 176

Возьмем плоскость σ . Две точки M и M' называются *симметричными* относительно плоскости σ , если прямая MM' перпендикулярна этой плоскости и точка их

пересечения есть середина отрезка MM' . Каждая точка плоскости σ считается симметричной самой себе.

Преобразование s , при котором каждая точка M отображается в симметричную ей точку M' относительно плоскости σ называется о т р а ж е н и е м от плоскости σ (черт. 175).

По определению

$$s(M) = M'$$

и

$$s(M') = M.$$

Следовательно, преобразование, обратное отражению от плоскости, совпадает с этим отражением:

$$s^{-1} = s;$$

$$s^2 = f_0 \text{ (тождественное преобразование).}$$

Отражение от плоскости не является движением. В самом деле, из свойств движения (§ 19) следует, что если при движении три точки, не лежащие на одной прямой, отображаются сами в себя, то оно является тождественным преобразованием. При отражении от плоскости σ все точки ее отображаются сами в себя, но оно не является тождественным преобразованием.

Т е о р е м а. *При отражении от плоскости отрезок отображается в равный ему отрезок.*

Пусть дан отрезок AB и плоскость σ (черт. 175). Проведем через него плоскость α , перпендикулярную плоскости σ . Пусть t — линия их пересечения. Очевидно, что отражение отрезка AB от плоскости σ равносильно отражению его в плоскости α от прямой t . Отсюда следует, что AB отобразится в отрезок $A'B'$ и $A'B' = AB$.

С л е д с т в и е. *При отражении от плоскости треугольник отображается в равный ему треугольник.*

Пусть вершины $\triangle ABC$ при отражении от плоскости отображаются в точки A' , B' и C' (черт. 176). По доказанному стороны его отображаются в равные отрезки:

$$A'B' = AB; A'C' = AC \text{ и } B'C' = BC.$$

Возьмем внутреннюю точку M треугольника ABC , проведем через нее прямые AM и BM , пересекающие стороны BC и AC соответственно в точках K и L . Отрезки AK и BL отобразятся в отрезки $A'K'$ и $B'L'$, принадлежащие $\triangle A'B'C'$. Точка M отобразится в точку M' , в которой пересекаются прямые $A'K'$ и $B'L'$. Значит, точка M'

принадлежит $\triangle A'B'C'$. Итак, каждая внутренняя точка $\triangle ABC$ отображается во внутреннюю точку $\triangle A'B'C'$, и обратно.

Следовательно,

$$s(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'.$$

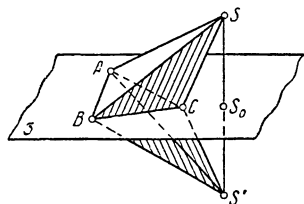
Кроме того, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ в силу равенства соответственных сторон этих треугольников.

Отсюда, далее, следует, что при отражении от плоскости любому многоугольнику соответствует равный ему многоугольник, а любому углу — равный ему угол.

Если фигуре F при отражении от плоскости α , соответствует фигура F' , то эти фигуры называются симметричными относительно данной плоскости.

Симметричные фигуры относительно плоскости могут оказаться, как это было показано выше, равными. Это значит, что, помимо отражения S , существует движение f , отображающее одну из этих фигур в другую. Этого может и не быть. Приведем пример симметричных относительно плоскости фигур, но неравных между собой.

Возьмем треугольную пирамиду $SABC$, ребра которой попарно неравны между собой и которая стоит своим осно-



Черт. 177

ванием ABC на плоскости σ (черт. 177). Легко видеть, что при отражении ее от плоскости σ получим пирамиду $S'ABC$, неравную данной пирамиде. Действительно, если существует движение f , отображающее пирамиду $SABC$ в пирамиду $S'ABC$, то точки A , B и C должны при этом отобразиться сами в себя,

так как среди остальных ребер пирамид нет равных ребру AB или ребру BC (значит, каждое из этих ребер не может при движении отобразиться в какое-либо другое ребро). Отсюда следует, что f должно быть тождественным движением, что невозможно.

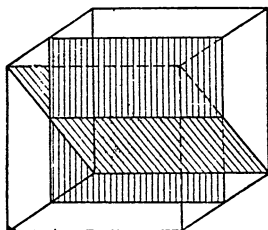
Итак, все соответственные грани пирамид $SABC$ и $S'ABC$ равны между собой, но сами эти пирамиды являются неравными фигурами.

Две фигуры F и F^* называются зеркально равными, если существует движение, отображающее одну из них в фигуру, симметричную другой относительно неко-

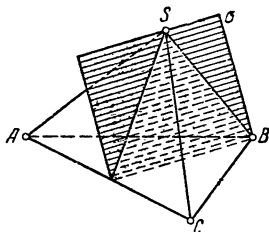
торой плоскости. Рассмотренные неравные между собой пирамиды являются зеркально равными.

Фигура F называется симметричной относительно плоскости σ , если при отражении от этой плоскости она отображается сама в себя. Плоскость σ в таком случае называется плоскостью симметрии фигуры.

Примером такой фигуры может служить многогранник, состоящий из двух пирамид $SABC$ и $S'ABC$ в рассмотренном выше примере.



Черт. 178



Черт. 179

Куб имеет девять плоскостей симметрии (черт. 178). шесть плоскостей симметрии проходят через параллельные ребра, не принадлежащие одной грани, и три плоскости симметрии проходят через центр куба и перпендикулярны ребрам (доказать).

Правильный тетраэдр имеет шесть плоскостей симметрии (черт. 179), каждая из которых проходит через ребро и середину другого ребра, не лежащего с первым в одной грани (доказать).

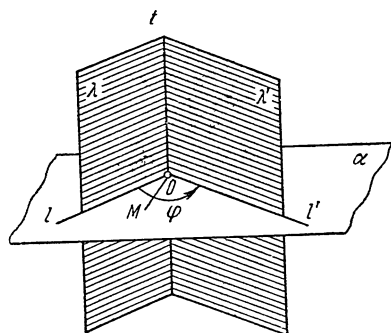
§ 62. Повороты в пространстве

Движение, при котором луч k отображается сам в себя, а полуплоскость λ , ограниченная прямой, которой принадлежит данный луч, отображается в полуплоскость λ' , ограниченную той же прямой, называется п о в о р о т о м. Прямая t , которой принадлежит луч k , называется о с ь ю п о в о р о т а. Как следует из § 7, такое движение существует и притом единственное. Все точки оси поворота отображаются сами в себя.

При повороте, отличном от тождественного движения, не существует других неподвижных точек, кроме точек оси.

Действительно, если бы такая точка M существовала, то мы имели бы три неподвижные точки при повороте (точка M и две любые точки оси), причем эти точки не лежали бы на одной прямой. Мы же знаем, что это возможно только при тождественном движении (§ 19).

Рассмотрим плоскость α , перпендикулярную оси поворота t (черт. 180). Пусть O — точка их пересечения. Если



Черт. 180

M — произвольная точка плоскости α , то $MO \perp t$. Поэтому при повороте точка M отображается в такую точку M' , что $M'O \perp t$ (при движении прямой угол отображается в равный ему угол, т. е. тоже в прямую). Так как все перпендикуляры к оси t , проходящие через точку O , лежат в одной плоскости, перпендикулярной этой оси, то точка

M' принадлежит плоскости α . Следовательно, любая точка плоскости α отображается в точку этой же плоскости, т. е. плоскость α отображается сама в себя.

Итак, если мы имеем поворот f относительно оси t , то любая плоскость, перпендикулярная t , отображается сама в себя. Поэтому поворот f относительно оси t для любой плоскости α , перпендикулярной оси поворота, есть движение на этой плоскости (§ 19).

Как выяснено выше, кроме точки O , на плоскости α не существует других неподвижных точек. Рассматривая различные движения на плоскости (§ 27), мы видим, что таким свойством обладает только поворот на плоскости. Найдем угол этого поворота. Пусть l и l' — лучи, по которым пересекаются полуплоскости λ и λ' с плоскостью α . Так как $f(l) = l'$, то ориентированный угол $\varphi = \angle(l, l')$ является этим углом поворота.

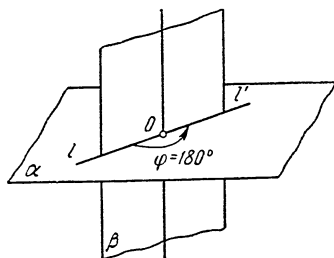
Итак, поворот в пространстве для всякой плоскости, перпендикулярной оси поворота, является поворотом вокруг точки пересечения данной оси с этой плоскостью, угол его φ равен линейному углу двугранного угла, образован-

ного полуплоскостями λ и λ' , и ориентирован от первой полуплоскости ко второй.

В дальнейшем угол φ мы будем называть углом поворота, понимая при этом поворот как движение в пространстве.

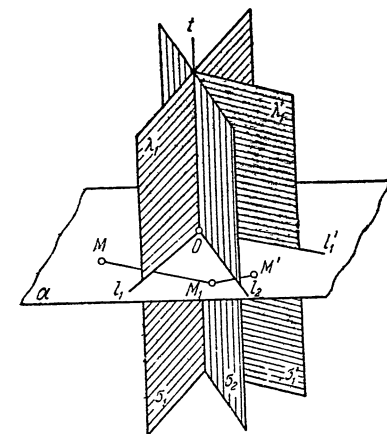
Поворот в пространстве определяет поворот на плоскости α . Очевидно, и обратное: поворот на плоскости α определяет поворот в пространстве. Так как поворот на плоскости полностью определяется центром поворота и углом поворота, то отсюда следует, что поворот в пространстве определяется осью поворота и углом поворота. Следовательно, вместо полуплоскостей λ и λ' для определения поворота мы можем задать любые две другие полуплоскости, выходящие из прямой t и образующие двугранный угол той же величины.

Рассмотрим важный частный случай. Пусть угол поворота является развернутым: $\varphi = 180^\circ$. В этом случае полуплоскости λ и λ' принадлежат одной плоскости β и являются взаимно дополнительными (черт. 181). В плоскости



Черт. 181

β мы имеем отражение от прямой t , а в плоскости α — отражение от точки O .



Черт 182

В рассматриваемом случае мы будем называть поворот отражением от прямой t . При отражении от прямой t любая точка M отображается в такую точку M' , что отрезок MM' перпендикулярен этой прямой и делится ею пополам.

Т е о р е м а. Произведение двух отражений относительно пересекающихся плоскостей σ_1 и σ_2 есть по-

ворот; линия пересечения t этих плоскостей есть ось поворота, а угол поворота равен удвоенному линейному углу двугранного угла, образованного плоскостями σ_1 и σ_2 .

Пусть s_1 — отражение от плоскости σ_1 , а s_2 — отражение от плоскости σ_2 (черт. 182). Рассмотрим преобразование s_2s_1 . Пусть λ_1 — полуплоскость плоскости σ_1 , ограниченная прямой t . Тогда имеем:

$$s_1(\lambda_1) = \lambda_1,$$

$$s_2(\lambda_1) = \lambda'_1,$$

где λ'_1 — полуплоскость, симметричная полуплоскости λ_1 относительно плоскости σ_2 .

Проведем плоскость α , перпендикулярную прямой t . Пусть l_1 и l_2 прямые, по которым пересекаются плоскости σ_1 и σ_2 с плоскостью α . Возьмем произвольную точку M плоскости α . Так как $\alpha \perp \sigma_1$, то при отражении этой точки от плоскости σ_1 мы получим точку M_1 , принадлежащую плоскости α . По такой же причине ($\alpha \perp \sigma_2$) точка M_1 при отражении от σ_2 отобразится в точку M' , принадлежащую тоже плоскости α . Итак, любая точка плоскости α отображается в точку той же плоскости. Легко видеть, что преобразование точки M в точку M' на плоскости α равносильно произведению отражений этой точки от прямых l_1 и l_2 . Так как произведение двух отражений на плоскости от пересекающихся прямых есть поворот, то, следовательно, преобразование s_2s_1 в плоскости α определяет поворот. Центром его является точка O , в которой прямая t пересекается с плоскостью α ; углом поворота является удвоенный угол — $\angle(l_1, l_2)$, т. е. удвоенный линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями σ_1 и σ_2 при пересечении.

Отсюда следует, что преобразование s_2s_1 является поворотом с осью t и с указанным выше углом поворота.

Т е о р е м а. *Всякий поворот в пространстве можно представить как произведение двух отражений от пересекающихся плоскостей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть поворот задан осью t и углом поворота φ . Возьмем произвольную плоскость σ_1 , проходящую через прямую t , и плоскость σ_2 , которая удовлетворяет следующим условиям:

а) она пересекается с плоскостью σ_1 по прямой t ;

б) линейный угол образованного при этом двугранного угла равен $\frac{\varphi}{2}$;

в) ориентация этого линейного угла от плоскости σ_1 к плоскости σ_2 совпадает с ориентацией угла поворота φ .

Тогда по доказанной теореме произведение отражения от плоскости σ_1 на отражение от плоскости σ_2 представляет заданный поворот.

Если при повороте около оси t на некоторый угол фигура F отображается сама в себя, то она называется с и м м е т р и ч н о й о т н о с и т е л ь н о этой о с и. Если при этом угол поворота φ равен $\frac{360^\circ}{n}$, то ось t называется осью симметрии фигуры F n -го порядка.

Пусть t — ось симметрии порядка n фигуры F . Обозначим через f поворот около этой оси на угол $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$. Тогда $f(F) = F$.

Движение f^2 является поворотом около той же оси на угол 2φ , f^3 — поворотом на угол 3φ ; вообще движение f^k является поворотом на угол $k\varphi$. При $k = n$ угол поворота окажется равным $n\varphi$, т. е. 360° . Следовательно, $f^n = f_0$ — тождественное движение.

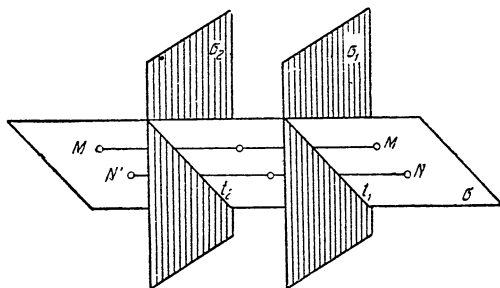
Рассмотрим совокупность поворотов $f, f^2, \dots, f^{n-1}, f^n = f_0$. В эту совокупность входит тождественное движение f_0 . Движением, обратным повороту f^k , является поворот f^{n-k} , так как $f^k f^{n-k} = f^n = f_0$. Наконец, произведение поворотов f^k и f^l даст поворот f^{k+l} , принадлежащий этой же совокупности (если $k+l > n$, то $k+l = n+m$, где $m < n$. Тогда $f^{k+l} = f^{m+n} = f^m f^n = f^m f_0 = f^m$). Отсюда следует, что данная совокупность поворотов образует группу (§ 19). Ее мы назовем группой осевой симметрии фигуры F .

В качестве примера рассмотрим правильную n -угольную пирамиду. Ось, проходящая через вершину пирамиды и центр ее основания, будет, как легко видеть, осью симметрии данной пирамиды n -го порядка.

§ 63. Переносы в пространстве

Т е о р е м а. *Произведение отражений относительно параллельных плоскостей есть движение, при котором векторы смещения всех точек одинаковы.*

Пусть s_1 — отражение от плоскости σ_1 , а s_2 — отражение от плоскости σ_2 , причем $\sigma_1 \parallel \sigma_2$ (черт. 183). Рассмотрим преобразование s_2s_1 . Пересечем данные плоскости третьей плоскостью σ ; отражение от нее обозначим через s . Так как $s^2 = f_0$ — тождественное преобразование, то $s_2s_1 = s_2s^2s_1 = s_2(ss)s_1$.



Черт. 183

Воспользуемся свойством сочетательности произведения отражений:

$$s_2s_1 = (s_2s) \circ (ss_1).$$

Но произведения ss_1 и s_2s по доказанной в предыдущем параграфе теореме являются поворотами. Следовательно, преобразование s_2s_1 является произведением двух движений, и поэтому само есть движение.

Рассмотрим теперь две произвольные точки M и N . Проведем через них плоскость σ , перпендикулярно данным плоскостям. Пусть t_1 и t_2 — линии пересечения этих плоскостей.

Преобразование s_2s_1 для точек M и N , как легко видеть, равносильно произведению отражений их в плоскости σ сначала от прямой t_1 , а затем от прямой t_2 . Так как $t_2 \parallel t_1$, то точки M и N в плоскости σ подвергаются переносу, вектор которого, очевидно, равен удвоенному расстоянию между плоскостями σ_1 и σ_2 и перпендикулярен им.

Векторы смещений двух произвольных точек оказались равными. В силу транзитивного свойства равенства векторов отсюда следует, что векторы смещений всех точек равны.

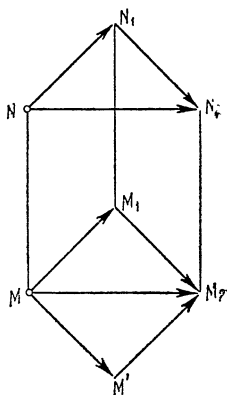
Преобразование, при котором векторы смещений всех точек равны, называется *переносом*. Вектор смещения любой точки называется при этом вектором переноса.

В рассмотренном случае вектор переноса равен удвоенному расстоянию между плоскостями σ_1 и σ_2 , перпендикулярен им и направлен от плоскости σ_1 к плоскости σ_2 .

Любой перенос мы можем представить как произведение отражений относительно параллельных плоскостей σ_1 и σ_2 . Эти плоскости мы должны взять перпендикулярно вектору переноса и на расстоянии друг от друга, равном половине его. В силу доказанной теоремы перенос в пространстве является частным случаем движения.

Всякий перенос в пространстве определяет перенос на плоскости, параллельной вектору переноса.

Рассмотрим теперь произведение двух переносов f_1 и f_2 . Пусть M и N — две произвольные точки (черт. 184). При переносе f_1 они отображаются соответственно в точки M_1 и N_1 . При переносе f_2 точки M_1 и N_1 отображаются соответственно в точки M_2 и N_2 . Так как отрезки MM_1 и NN_1 равны и параллельны, то отрезки MN и M_1N_1 тоже равны и параллельны. По такой же причине равны и параллельны отрезки M_1N_1 и M_2N_2 . Отсюда следует, что $MN = M_2N_2$ и $MN \parallel M_2N_2$. Значит, фигура MNN_2M_2 — параллелограмм и поэтому векторы $\overrightarrow{MM_2}$ и $\overrightarrow{NN_2}$ равны.



Черт. 184

Итак, при преобразовании f_2f_1 векторы смещения любых двух точек равны. Следовательно, f_2f_1 есть перенос.

Дополним $\triangle MM_1M_2$ до параллелограмма MM_1M_2M' . Так как $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M'M_2} = \overrightarrow{MM_1}$, то при преобразовании f_1f_2 точка M отобразится в ту же точку M_2 . Следовательно, переносы f_2f_1 и f_1f_2 одинаковы: $f_2f_1 = f_1f_2$.

Заметим, что вектор $\overrightarrow{NN_2}$ называется суммой векторов $\overrightarrow{NN_1}$ и $\overrightarrow{N_1N_2}$.

Итак, мы доказали теорему: *произведение двух переносов есть перенос, вектор которого равен сумме векторов данных переносов; произведение переносов обладает свойством переместительности.*

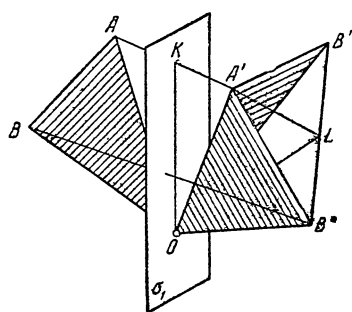
Всякий перенос f можно представить как произведение двух переносов следующим образом: пусть $\overrightarrow{MM'}$ — вектор переноса f (черт. 185). Проведем через точку M две произвольные прямые a и b , а через точку M' прямые, им параллельные. Получим параллелограмм $MM_1M'M_2$. Рассмотрим переносы f_1 и f_2 с векторами $\overrightarrow{MM_1}$ и $\overrightarrow{MM_2}$. По доказанному выше $f = f_2 f_1$.

Будем говорить в этом случае, что перенос f разложен на переносы f_1 и f_2 .

§ 64. Движение с неподвижной точкой

Рассмотрим движение в пространстве, при котором по крайней мере одна из точек отображается сама в себя. Таким движением, в частности, является поворот. Существуют ли движения с неподвижной точкой, отличные от поворота? Оказывается, что таких движений нет.

Т е о р е м а. *Всякое движение с неподвижной точкой есть поворот относительно оси, проходящей через эту точку.*



Черт. 186

Пусть O — неподвижная точка, A и B — две другие точки, не лежащие вместе с точкой O на одной прямой, f — данное движение (черт. 186).

При движении f :

$$f(O, A, B) = O, A', B'.$$

Как известно (§ 19), движение полностью определено перемещением трех точек, не лежащих на одной прямой. Следовательно, данное

движение f определяется перемещением точек A и B .

Так как $OA' = OA$, то плоскость σ_1 , проходящая через середину отрезка AA' (точка K) и перпендикулярная к нему, пройдет через точку O . Рассмотрим отраже-

ние s_1 от этой плоскости. Точка O отобразится сама в себя, точка A — в точку A' , а точка B — в некоторую точку B^* . При этом $OB^* = OB$ и $A'B^* = AB$, а так как $OB' = OB$ и $A'B' = AB$, то $OB^* = OB'$ и $A'B^* = A'B'$.

Пусть L — середина $B'B^*$. Тогда $A'L \perp B'B^*$ и $OL \perp B'B^*$. Следовательно, плоскость σ_2 , проходящая через точки O, A' и L , будет перпендикулярна $B'B^*$.

Рассмотрим теперь отражение s_2 от плоскости σ_2 . Точки O и A' отобразятся сами в себя, а точка B^* — в точку B' .

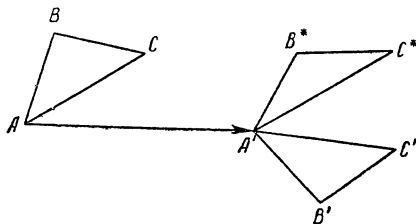
Преобразование $s_2 s_1$ есть поворот (§ 62) вокруг оси, являющейся линией пересечения плоскостей σ_1 и σ_2 . Эта ось пройдет через точку O , так как последняя является общей точкой плоскостей σ_1 и σ_2 . Поворот $s_2 s_1$ отображает точки O, A и B в точки O, A' и B' , при движении f имеем то же самое. Следовательно, $f = s_2 s_1$.

С л е д с т в и е. *Произведение поворотов, оси которых пересекаются в одной точке, есть поворот относительно оси, проходящей через ту же точку.*

§ 65. Движение произвольного вида в пространстве

Мы изучили два вида движения в пространстве: поворот и перенос. Докажем, что произвольное движение в пространстве может быть представлено как произведение переноса на поворот.

Пусть произвольное движение f отображает точки A, B и C , не лежащие на одной прямой, в точки A', B' и C' (черт. 187).



Черт. 187

Рассмотрим перенос f_1 с вектором $\overrightarrow{AA'}$. При этом переносе $\triangle ABC$ отобразится в $\triangle A'B^*C^*$. Так как $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$, а $\triangle ABC = \triangle A'B^*C^*$, то $\triangle A'B'C' = \triangle A'B^*C^*$. Поэтому существует движение f_2 , отобра-

жающее $\triangle A'B^*C^*$ в $\triangle A'B'C'$. Как доказано в предыдущем параграфе, это движение является поворотом.

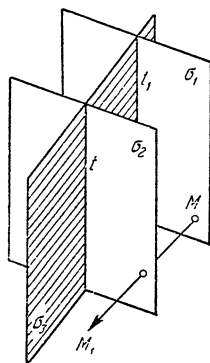
Рассмотрим движение $f_2 f_1$. При этом движении $\triangle ABC$ отображается в $\triangle A'B'C'$. Так как перемещением трех точек, не лежащих на одной прямой, движение определено полностью, то движение $f_2 f_1$ совпадает с данным движением f :

$$f = f_2 f_1.$$

Итак, произвольное движение в пространстве может быть представлено как произведение переноса на поворот.

Рассмотрим теперь частный случай такого движения, когда вектор переноса f_1 перпендикулярен оси поворота f_2 .

Пусть вектор переноса $\overrightarrow{MM_1}$ перпендикулярен оси поворота t (черт. 188). Тогда существует плоскость σ_2 , проходящая через прямую t и перпен-



Черт. 188

дикулярная вектору $\overrightarrow{MM_1}$. Представим перенос f_1 в виде произведения отражений от плоскостей σ_1 и σ_2 ; плоскость σ_1 параллельна плоскости σ_2 и находится от нее на расстоянии, равном половине вектора переноса. Поворот f_2 в свою очередь представим как произведение отражений от плоскостей σ_2 и σ_3 ; плоскость σ_3 при этом проходит через ось поворота t и образует с плоскостью σ_2 двугранный угол, линейный угол которого равен половине угла поворота.

Итак:

$$f_1 = s_2 s_1, \quad f_2 = s_3 s_2,$$

где s_1 , s_2 и s_3 — отражения от соответствующих плоскостей.

Движение f выражается следующим образом:

$$f = f_2 f_1 = (s_3 s_2) \cdot (s_2 s_1).$$

Применяя свойство сочетательности произведения отражений, получим:

$$f = s_3 (s_2 s_2) s_1 = s_3 f_0 s_1 = s_3 s_1,$$

так как $s_2 s_2 = f_0$ — тождественное движение.

Плоскости σ_1 и σ_3 пересекаются по прямой t_1 , параллельной оси поворота t , и образуют при этом двугранный угол, равный соответствующему двугранному углу, образованному при пересечении плоскостей σ_2 и σ_3 . Поэтому движение s_3s_1 представляет поворот с осью t_1 ; повороты f_2 и s_3s_1 имеют при этом одинаковые углы поворота.

Итак, мы доказали *теорему: произведение переноса на поворот около оси, перпендикулярной вектору переноса, есть поворот на тот же угол около оси, параллельной оси данного поворота.*

Пусть теперь вектор переноса не перпендикулярен оси поворота. Разложим тогда перенос f_1 на переносы f_1^* и f_1^{**} (§ 63) так, чтобы вектор переноса f_1^* был параллелен оси поворота t , а вектор переноса f_1^{**} перпендикулярен этой оси.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1^{**} f_1^*, \\ f &= f_2 f_1 = f_2 (f_1^{**} f_1^*). \end{aligned}$$

Применяя свойство сочетательности, получим:

$$f = (f_2 f_1^{**}) f_1^*.$$

По доказанному выше движению $f_2 f_1^{**}$ есть поворот около оси t_1 , параллельной оси t . Обозначая его через f_2^* , окончательно получим:

$$f = f_2^* f_1^*.$$

Движение f мы представили как произведение переноса f_1^* на поворот f_2^* , ось которого t_1 параллельна вектору переноса. Такое движение называется *винтовым*. Поворот и перенос мы можем считать частными случаями винтового движения. Если f_1^* является тождественным движением, то f — поворот; если же тождественным движением является f_2^* , то f — перенос. Этим доказана следующая теорема.

Теорема. Всякое движение в пространстве является винтовым движением.

Рассмотрим еще раз движения, при которых некоторая плоскость отображается сама в себя:

1. При переносе каждая плоскость, параллельная вектору переноса, отображается сама в себя. На этой плоскости мы будем иметь перенос с тем же вектором.

2. При повороте инвариантной плоскостью является плоскость, перпендикулярная оси поворота. На этой плоскости мы будем иметь поворот вокруг точки пересечения ее с осью поворота.

3. При повороте на развернутый угол около оси t (т. е. при отражении от прямой t) инвариантной остается также любая плоскость, проходящая через эту ось. В этой плоскости мы будем иметь отражение от прямой t .

4. При винтовом движении с углом поворота, равным развернутому углу, инвариантной плоскостью является любая плоскость, проходящая через ось поворота t . В этой плоскости мы будем иметь скользящее отражение с осью t .

§ 66. Отражение от точки в пространстве

Точки M и M' мы назовем симметричными относительно точки O , если последняя является серединой отрезка MM' . Преобразование, при котором любая точка преобразуется в симметричную ей точку относительно определенной точки O , называется **о т р а ж е н и е м о т э т о й т о ч к и**.

Рассмотрим преобразование, представляющее произведение отражения от прямой (т. е. поворот около прямой на развернутый угол) на отражение от плоскости, перпендикулярной этой прямой. Докажем, что это преобразование является отражением от точки, в которой пересекается данная плоскость с данной прямой.

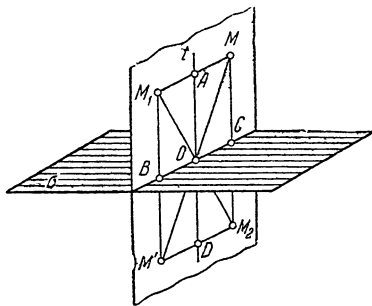
Обозначим: f — отражение от прямой t ,

s — отражение от плоскости σ .

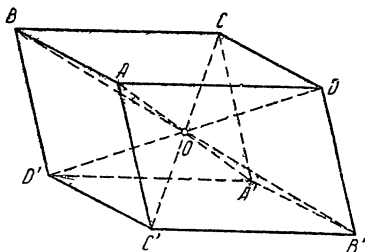
По условию $\sigma \perp t$. Пусть M — произвольная точка (черт. 189). При отражении от прямой t она отображается в точку M_1 , расположенную с точкой M в некоторой плоскости α , проходящей через прямую t . При отражении от σ точка M_1 отображается в точку M' . Так как $t \perp \sigma$, то $\alpha \perp \sigma$ и поэтому M' лежит в плоскости $\bar{\alpha}$. Соединим точку O , в которой пересекаются прямая t и плоскость σ , с точками M и M' . Из свойств отражений f и s вытекает, что O — середина отрезка MM' ($OM' = OM_1 = OM$; $\angle MOA = \angle M_1OA$; $\angle M_1OB = \angle M'OB$;
 $\angle AOM_1 + \angle M_1OB = 90^\circ$; $\angle MOA + \angle M_1OA +$
 $+ \angle M_1OB + \angle M'OB = 180^\circ$).

Итак, при преобразовании sf любая точка M отображается в симметричную ей точку M' относительно точки O . Следовательно, это преобразование является отражением от точки O .

Если мы сначала совершим отражение от плоскости σ , а затем отражение от прямой t , то точка M , как легко



Черт. 189



Черт. 190

видеть, отобразится в ту же точку M' (если M при отражении от σ отобразится в M_2 , то четырехугольник $MM_1M'M_2$ является прямоугольником). Отсюда следует, что произведение преобразований f и s перестановочно:

$$sf = fs.$$

Из свойств отражения от плоскости вытекает, что при отражении от точки отрезок, угол и многоугольник отображаются в равные им фигуры. Однако произвольная фигура, вообще говоря, не отображается в равную ей фигуру.

Если фигура F при отражении от точки O отображается сама в себя, то эта точка называется **центром симметрии данной фигуры**.

В качестве примера приведем параллелепипед. Центром симметрии его является точка пересечения диагоналей (черт. 190).

Действительно, при отражении от этой точки (точка O) каждая вершина параллелепипеда отображается в противоположную ей вершину. Отсюда следует, что противоположные грани параллелепипеда отображаются друг в друга. Любая внутренняя точка отобразится, очевидно, тоже во внутреннюю точку.

ГЛАВА XI

МНОГОГРАННИКИ

§ 67. Общие свойства многогранников

Уточним понятие о многограннике, известное из школьного курса.

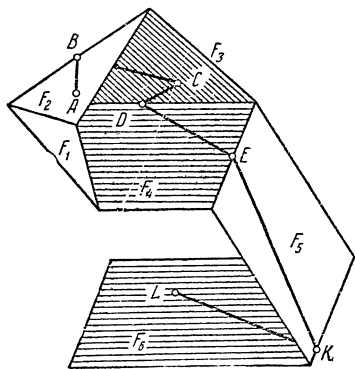
Простой многогранной поверхностью назовем фигуру, представляющую соединение конечного числа простых многоугольников, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Любые два многоугольника или не имеют общих точек, или имеют только одну общую точку, которая является их общей вершиной, или множество всех их общих точек представляет отрезок, который является общей стороной этих многоугольников; никаких других общих точек, помимо перечисленных, данные многоугольники не имеют.

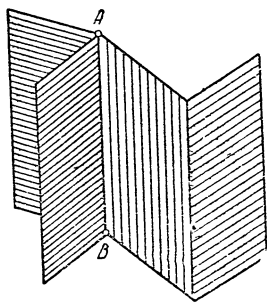
2. Если отрезок является общей стороной двух многоугольников, то он не является стороной никакого другого многоугольника.

3. Все многоугольники, имеющие общую вершину, можно перенумеровать так, что любые два из них, номера которых отличаются на единицу, имеют общую сторону, выходящую из общей вершины.

4. Любую точку любого из многоугольников можно соединить с любой точкой любого другого многоугольника ломаной, все точки которой принадлежат данной фигуре.



Черт. 191

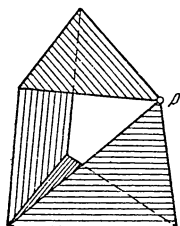


Черт. 192

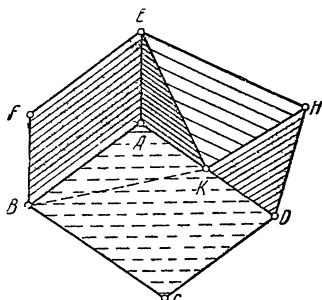
Указанные многоугольники, их стороны и вершины называются соответственно *гранями*, *ребрами* и *вершинами* многогранной поверхности. Грани, имеющие общее ребро, назовем *смежными*.

На чертеже 191 дан пример многогранной поверхности, имеющей шесть граней, и показана ломаная $ABCDEKL$, соединяющая точку A грани F_2 с точкой L грани F_6 . На чертежах 192 и 193 даны примеры фигур, не являющихся простыми многогранными поверхностями, так как в одном случае нарушено условие 2 (для отрезка AB в первом примере), а в другом случае — условие 3 (для вершины A во втором примере).

Фигура, представленная чертежом 194, также не является простой многогранной поверхностью, так как она не отвечает условию 1: многоугольник $ABCD$ имеет с мно-



Черт. 193



Черт. 194

гоугольником EKN общую точку K , которая не является их общей вершиной; многоугольники $ABCD$ и AEK имеют общий отрезок AK , который не является стороной первого из них (тоже относится к многоугольникам $ABCD$ и KHD). Однако, если мы будем рассматривать многоугольник $ABCD$ как соединение многоугольников ABK и $BKDC$ (для этого проведем отрезок BK), то данная фигура будет удовлетворять всем указанным условиям, т. е. будет простой многогранной поверхностью, в которой две смежные грани ABK и $BKDC$ расположены в одной плоскости. Мы скажем, что данная фигура приведена к простой многогранной поверхности.

Ребро многогранной поверхности, не являющееся общей стороной двух граней, называется *свободным ребром*.

Совокупность свободных ребер многогранной поверхности называется ее *краем*.

Простая многогранная поверхность называется *замкнутой*, если она не имеет свободных ребер.

Будем говорить, что фигура F делит пространство на две области, если все точки, не принадлежащие фигуре F , можно разбить на два класса следующим образом:

- 1) каждый класс содержит точки;
- 2) любые две точки одного класса можно соединить ломаной, не имеющей с фигурой F общих точек;
- 3) никакие две точки разных классов нельзя соединить такой ломаной. Каждый из этих классов составляет одну область.

А к с и о м а. *Всякая плоскость делит пространство на две выпуклые области.*

Каждая из этих областей вместе с данной плоскостью называется полупространством. Точки, принадлежащие одной области, считаются лежащими по одну сторону плоскости; точки, принадлежащие разным областям, считаются лежащими по разные стороны этой плоскости.

Т е о р е м а. *Полупространство является выпуклой фигурой.*

Доказательство данной теоремы проводится совершенно так же, как доказательство соответствующей теоремы о полуплоскости (§ 5). Его мы предлагаем провести самостоятельно.

Прежде чем дать определение многогранника, примем следующую аксиому.

А к с и о м а. *Замкнутая простая многогранная поверхность делит пространство на две области; существуют прямые, целиком принадлежащие одной области, и не существует лучей, целиком лежащих во второй области.*

Первая из этих областей называется *внешней*, а вторая *внутренней* относительно данной многогранной поверхности.

Простая замкнутая многогранная поверхность вместе с внутренней областью, определяемой ею, называется многогранником. Точки внутренней области называются внутренними точками многогранника. Грани, ребра и вершины многогранной поверхности называются гранями, ребрами и вершинами многогранника. Саму многогранную поверхность будем называть поверхностью многогранника.

Т е о р е м а. Любая прямая, проходящая через внутреннюю точку многогранника, имеет с ним общий отрезок, содержащий данную точку и соединяющий две точки поверхности этого многогранника.

Доказательство этой теоремы представляет буквальное повторение доказательства соответствующей теоремы о многоугольниках (§ 6).

Многогранник называется *выпуклым*, если по отношению к плоскости, содержащей любую его грань, все вершины, не принадлежащие этой грани, лежат по одну сторону ее.

Из определения следует, что все ребра и грани выпуклого многогранника принадлежат одному полупространству, ограниченному плоскостью, содержащей какую-либо грань этого многогранника. Так как всякая внутренняя точка многогранника принадлежит отрезку, соединяющему две точки поверхности его, то внутренние точки данного выпуклого многогранника принадлежат тому же полупространству.

Итак, выпуклый многогранник принадлежит каждому полупространству, ограниченному плоскостью, содержащей его грань.

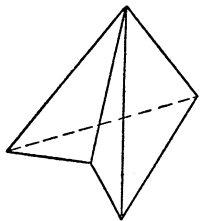
Фигура Φ , представляющая пересечение всех таких полупространств, содержит в себе данный выпуклый многогранник F . Если M — внутренняя точка многогранника F , а N — точка фигуры Φ , не принадлежащая граням этого многогранника, то отрезок MN не пересекает его поверхность (иначе точки M и N не могли бы обе принадлежать одному из данных полупространств). Следовательно, точка N — внутренняя точка многогранника F . Таким образом, мы установили тождественность между фигурами Φ и F . Так как фигура Φ — выпуклая фигура (§ 4), то мы доказали следующее предложение.

Т е о р е м а. *Выпуклый многогранник является выпуклой фигурой.*

В дальнейшем будем рассматривать преимущественно выпуклые многогранники. Примерами их являются куб и тетраэдр, свойства которых и способы построения известны из школьного курса. Примеры невыпуклых многогранников даны на чертежах 195 а и 195 б. Более сложными примерами выпуклых многогранников являются известные из школьного курса призма, пирамида и усеченная пирамида.

ченная пирамида, основаниями которых являются выпуклые многоугольники.

Из определения выпуклого многогранника следует, что все грани его являются выпуклыми многоугольниками. Чтобы убедиться в этом, возьмем какую-либо грань F выпуклого многогранника. Пусть AB — какое-либо ребро этой грани, а F' — смежная грань, имеющая с гранью F ребро AB в качестве общей стороны. Плоскости граней F и F' пересекаются по прямой AB . Так как все вершины грани F , кроме вершин A и B , лежат по одну сторону от плоскости F' , то они также лежат в плоскости F по одну сторону от прямой AB . Отсюда следует, что грань F — выпуклый многоугольник. Углы многоугольников, каждый из которых является гранью многогранника, называются *плоскими углами* этого многогранника.



Черт. 195а

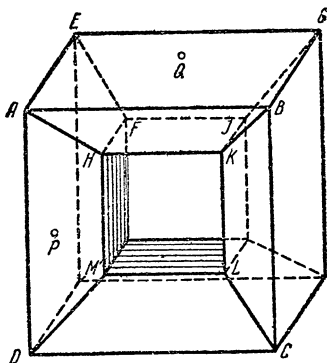
Т е о р е м а. Число плоских углов многогранника вдвое больше числа его ребер.

Пусть F_1, F_2, \dots, F_n — грани многогранника, и пусть k_i — число сторон грани F_i . Если t — число ребер многогранника, то

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = t,$$

потому что каждое ребро является общей стороной двух граней. Так как число плоских углов для каждой грани равно числу ее сторон, то общее число плоских углов равно тоже $2t$.

Два многогранника называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между их гранями, при котором:



Черт. 195б

1) соответственные грани имеют одно и то же число сторон;

2) двум граням, имеющим общее ребро, соответствующие грани, также имеющие общее ребро;

3) граням, имеющим общую вершину, соответствуют грани, также имеющие общую вершину.

Примером изоморфных многогранников может служить усеченная четырехугольная пирамида и четырехугольная призма.

Приведем без доказательства важную теорему французского математика Коши (1813) о выпуклых многогранниках.

Т е о р е м а К о ш и. *Если каждые две соответственные грани двух изоморфных выпуклых многогранников равны между собой, то данные многогранники либо равны, либо зеркально равны (§ 61).*

Теорема Коши выражает свойство «жесткости» выпуклого многогранника. Нельзя менять величину двугранных углов выпуклого многогранника, не изменяя при этом углов и сторон его граней.

§ 68. Теорема Эйлера для выпуклых многогранников

Т е о р е м а. *Если n — число граней выпуклого многогранника, s — число его вершин, а t — число его ребер, то*

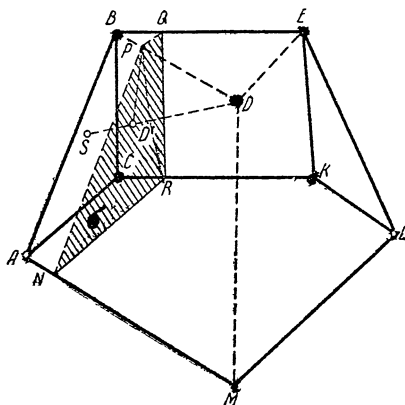
$$n + s - t = 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем грань F данного многогранника Φ и внутри нее точку S . Пусть S' — точка любой другой грани F' . Отрезок SS' лежит по одну сторону от любой из остальных граней многогранника. Следовательно, он не имеет общих точек ни с одной из этих граней. Так как Φ — выпуклая фигура, то все внутренние точки отрезка SS' являются внутренними точками многогранника.

На поверхности данного многогранника возьмем еще одну точку S'' , тоже не лежащую на грани F . Отрезки SS' и SS'' не могут иметь общих точек, кроме точки S . Действительно, если бы эти отрезки имели две общие точки, то один из них оказался бы частью другого, и тогда второй имел бы внутри себя точку поверхности многогранника Φ , что противоречит только что сделанному выводу. Отсюда следует, что отрезки, соединяющие точку S гра-

ни F с точками остальных граней, не имеют других общих точек, кроме общего конца S .

Проведем плоскость σ , параллельную грани F и расположенную от нее по ту же сторону, что и данный многогранник (черт. 196). Расстояние плоскости σ от грани F возьмем таким, чтобы оно было меньше расстояния от плоскости грани F ближайшей к этой плоскости вершины



Черт. 196

многогранника, не принадлежащей данной грани. Тогда вершины грани F и остальные вершины многогранника расположатся по разные стороны от плоскости σ . Поэтому плоскость σ пересечет все грани, смежные с гранью F .

Пусть F_σ — сечение многогранника плоскостью σ (на чертеже — четырехугольник $PQRN$). Этим сечением данный многогранник Φ делится на два многогранника. Пусть Φ' один из двух многогранников, который расположен по ту сторону от плоскости σ , по которую не расположена грань F .

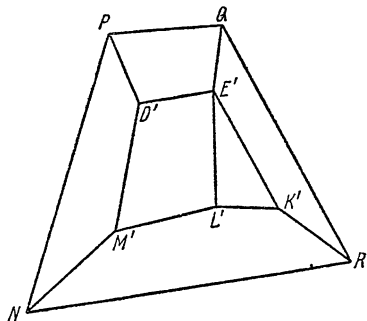
Очевидно, что число граней многогранника Φ' равно числу граней многогранника Φ . Число вершин и число ребер многогранника Φ' , не принадлежащих грани F_σ , соответственно равны числу вершин и числу ребер многогранника Φ , не принадлежащих грани F . Изменения в количестве вершин и ребер, следовательно, может произойти только за счет замены грани F гранью F_σ . Очевидно,

что при этом приращение числа сторон равно приращению числа вершин. Если s' — число вершин многогранника Φ' , а t' — число его ребер, то

$$s' - s = t' - t.$$

Следовательно, если теорема Эйлера справедлива для многогранника Φ' , то она справедлива и для данного многогранника.

Спроектируем из центра S на грань F_σ все остальные грани многогранника Φ' . Как мы видели выше, лучи, выходящие из точки S и проходящие через вершины многогранника Φ' , других общих точек не имеют. Поэтому каждая из этих граней спроектируется на грань F_σ в одноименный выпуклый многоугольник (черт. 197), и многоугольник F_σ окажется разложенным при этом на выпуклые многоугольники, число которых равно $n-1$ (т. е. числу остальных граней).



Черт. 197

Пусть k — число вершин многоугольника F_σ . Тогда внутри этого многоугольника расположится $s' - k$ проекций остальных вершин многогранника, которые будут вершинами многоугольников, лежащих внутри многоугольника F_σ .

Так как каждая грань проектируется в многоугольник с тем же числом сторон, то сумма всех плоских углов многогранника Φ' без углов грани F_σ равна сумме углов всех многоугольников, на которые оказалась разложенной грань F_σ . Подсчитаем последнюю.

Сумма всех углов с вершинами внутри многоугольника F_σ равна $4d(s' - k)$. Сумма всех углов с вершинами, совпадающими с вершинами многоугольника F_σ , равна сумме углов этого многоугольника, т. е. $2d(k - 2)$. Отсюда получим искомую сумму углов:

$$4d(s' - k) + 2d(k - 2).$$

Прибавляя к этому результату сумму углов грани F_σ ,

получим сумму всех плоских углов многогранника Φ' :

$$4d(s' - k) + 2d(k - 2) + 2d(k - 2) = 4d(s' - 2).$$

Проведем теперь подсчет суммы углов многогранника Φ' другим способом. Пусть k_1, k_2, \dots, k_n — число сторон соответствующих граней этого многогранника. По доказанной в § 67 теореме

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2t'.$$

Сумма углов первой грани равна $2d(k_1 - 2)$, второй $2d(k_2 - 2)$, третьей $2d(k_3 - 2)$ и т. д. Сумма всех плоских углов многогранника равна

$$\begin{aligned} 2d(k_1 - 2) + 2d(k_2 - 2) + \dots + 2d(k_n - 2) &= \\ = 2d[(k_1 + k_2 + \dots + k_n) - 2n] &= 2d(2t' - 2n) = 4d(t' - n). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$4d(s' - 2) = 4d(t' - n),$$

или

$$s' - 2 = t' - n,$$

$$n + s' - t' = 2.$$

Как показано выше, отсюда получим:

$$n + s - t = 2.$$

Легко убедиться на примерах, что теорема Эйлера для невыпуклых многогранников не всегда имеет место без дополнительных ограничений. Например, она неверна для многогранника, изображенного на чертеже 195 б. Для этого многогранника $n = 16$, $s = 16$, $t = 32$.

$$n + s - t = 0.$$

Заметим для этого примера, что ломаная $AEFH$ не разбивает поверхность многогранника на две части. Если разрезать ее по этой ломаной, то любые две точки поверхности можно будет по-прежнему соединить ломаной, все точки которой принадлежат поверхности. Если после этого произвести второй разрез по ломаной $ABCD$, то и после этого любые две точки поверхности можно будет соединить такой ломаной, минуя разрезы. Например, точку Q грани $AEGV$ можно соединить с точкой P грани $AHMD$ ломаной, переходя от грани к грани следующим образом:

$$AEGB \rightarrow EGIF \rightarrow HFIK \rightarrow ABKH \rightarrow \\ \rightarrow BKLC \rightarrow DMLC \rightarrow AHMD.$$

Любой третий разрез по замкнутой ломаной, состоящей из ребер многогранника, разобьет после этого поверхность многогранника на две части.

Оказывается, что для выпуклого многогранника всякая замкнутая простая ломаная, составленная из его ребер, делит поверхность этого многогранника на две части; для всякого невыпуклого многогранника, обладающего этим свойством, теорема Эйлера справедлива (пример такого многогранника дан на чертеже 194).

Теорема Эйлера справедлива для любого многогранника, изоморфного выпуклому многограннику.

§ 69. Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — правильные и равные между собой многоугольники и если число ребер, выходящих из вершины многогранника, одинаково для всех вершин его.

Пусть в данном правильном многограннике: m — число ребер одной грани ($m > 2$), k — число ребер, выходящих из одной вершины ($k > 2$), n — число граней, s — число вершин и t — число ребер многогранника. Так как каждое ребро является общей стороной двух граней и соединяет две вершины, то

$$mn = 2t, \quad (1)$$

$$ks = 2t. \quad (2)$$

Кроме того, по теореме Эйлера имеем:

$$n + s - t = 2. \quad (3)$$

Решая уравнения 1, 2 и 3 относительно t , n и s получим:

$$n = \frac{2t}{m},$$

$$s = \frac{2t}{k},$$

$$t = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}}.$$

Натуральные числа m и k должны удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2} > 0. \quad (4)$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} \text{при } k = 3 & \quad m < 6, \\ \text{при } k = 4 & \quad m < 4, \\ \text{при } k = 5 & \quad m < \frac{10}{3}, \\ \text{при } k > 5 & \quad m < 3. \end{aligned}$$

Учитывая, что $m > 2$ и $k > 2$, имеем следующие решения неравенства (4) и следующие соответствующие им значения n , s и t :

	m	k	n	s	t	
I	3	3	4	4	6	Тетраэдр
II	4	3	6	8	12	Гексаэдр (куб)
III	3	4	8	6	12	Октаэдр
IV	3	5	20	12	30	Икосаэдр
V	5	3	12	20	30	Додекаэдр

В ы в о д. Могут существовать только пять типов правильных многогранников, которые соответствуют пяти решениям в целых положительных числах уравнений 1—3. Ниже мы покажем, что все эти пять типов правильных многогранников существуют. Наименование каждого из них дано в таблице.

§ 70. Построение правильных многогранников

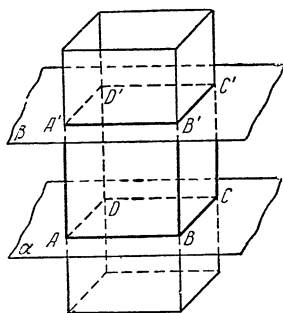
Простейшим правильным многогранником является правильный гексаэдр (шестигранник), который обычно называется *кубом*. Существование куба вытекает из возможности его построения.

Построение куба можно провести следующим образом. На плоскости α возьмем квадрат $ABCD$ (черт. 198); построим плоскости, перпендикулярные к плоскости α и проходящие через стороны этого квадрата; на линии пересечения двух таких плоскостей, проходящих через прямые AB и AD , возьмем точку A' так, чтобы $AA' = AB$, через нее

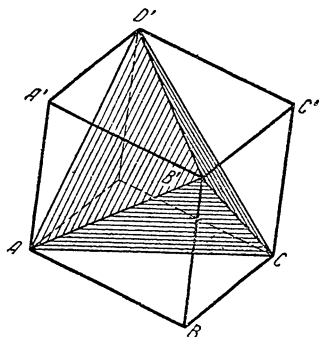
проведем плоскость β , параллельную плоскости α . Полученный при взаимном пересечении всех указанных плоскостей многогранник, как легко видеть, является кубом.

Покажем, как при помощи куба можно построить все остальные правильные многогранники, перечисленные в предыдущем параграфе. Этим мы докажем, что каждый из них существует. Начнем с правильного тетраэдра.

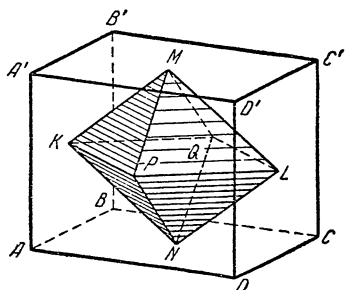
Возьмем две скрещивающиеся диагонали граней куба, лежащие в параллельных гранях, и проведем плоскости через каждую из этих диагоналей и концы другой диагонали (черт. 199). Полученный при взаимном пересечении этих плоскостей многогранник $ACB'D'$ является



Черт. 198



Черт. 199



Черт. 200

ся правильным тетраэдром (четырегранником). Если a — ребро куба, то ребро тетраэдра $a\sqrt{2}$. Легко показать, что все двугранные углы правильного тетраэдра равны между собой.

Перейдем теперь к октаэдру.

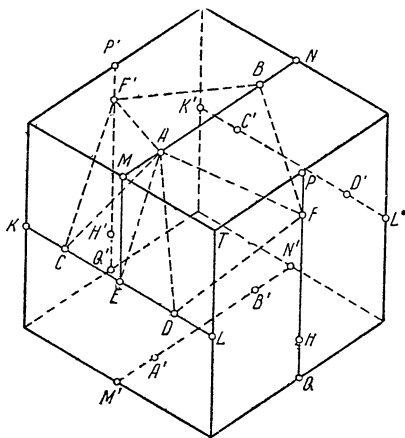
Треугольник, вершины которого являются центрами трех граней куба с общей вершиной, будет правильным (черт. 200). Поэтому многогранник, поверхность которого является соединением всех таких треугольников, также будет правильным. Для него $m = 3$ и $k = 4$, т. е. полученный много-

гранник представляет правильный октаэдр (восьмигранник).

Ребро его равно $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a — ребро куба.

Из способа построения октаэдра следует, что расстояние центра куба от каждой вершины октаэдра равно $\frac{a}{2}$. Построенный октаэдр можно разложить на восемь равных правильных треугольных пирамид с общей вершиной в точке O и с основаниями, являющимися гранями этого октаэдра. Отсюда следует, что все двугранные углы октаэдра равны между собой.

Пользуясь кубом, построим теперь правильный икосаэдр (двадцатигранник). Проведем для этого в каждой грани куба по отрезку, соединяющему середины двух параллельных сторон данной грани. Эти отрезки построим так, чтобы те из них, которые лежат в параллельных гранях, были



Черт. 201

параллельны, а те из них, которые лежат в смежных гранях, были перпендикулярны между собой. На чертеже 201 такими являются отрезки MN и $M'N'$, PQ и $P'Q'$, KL и $K'L'$. Возьмем два отрезка MN , KL , лежащие в смежных гранях куба. Найдем на отрезке MN точки A и B и на отрезке KL точки C и D так, чтобы:

- 1) $AB = CD = AC = AD$,
- 2) $AM = BN = KC = LD$.

Пусть ребро куба равно a и пусть x — длина отрезка CD . Соединим середину E отрезка CD с точками M и A и рассмотрим $\triangle AME$. Очевидно, что угол при вершине M этого треугольника прямой. Из условий, которым должны удовлетворять точки A , B , C и D , следует, что

$$AM = \frac{a-x}{2}.$$

Так как $\triangle ACD$ должен быть равносторонним, то AE — его высота, и поэтому

$$AE = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Кроме того, $ME = \frac{a}{2}$. По теореме Пифагора находим:

$$AE^2 = EM^2 + MA^2.$$

Отсюда:

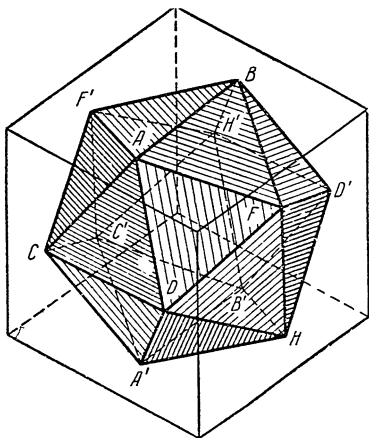
$$\frac{3x^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{(a-x)^2}{4},$$

$$x = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

$$AM = \frac{a}{4} (3 - \sqrt{5}).$$

Положение точек A , B , C и D на отрезках MN и KL определено. На отрезках PQ , $M'N'$, $K'L'$ и $P'Q'$ возьмем соответственно точки F и H , A' и B' , C' и D' , F' и H' , удовлетворяющие тем же условиям.

Существует пять равносторонних треугольников с общей вершиной A и с остальными вершинами в найденных точках. Для данного чертежа это треугольники ACD , ADF , AFB , ABF' и $AF'C$. То же справедливо для любой подобной точки. Построив все такие равносторонние треугольники, получим правильный многогранник, для которого $m = 3$ и $k = 5$ (черт. 202). Следовательно, этот многогранник является правильным икосаэдром.



Черт. 202

Расстояния центра куба O от всех вершин построенного икосаэдра одинаковы. Поэтому данный икосаэдр можно разложить на двадцать равных правильных треугольных пирамид с общей вершиной O и с основаниями, которые являются гранями этого икосаэдра. Отсюда следует, что все двугранные углы его равны между собой. Из равенства двугранных углов икосаэдра в свою очередь следует, что расстояния между несовпадающими вершинами смежных граней его равны между собой (например, $BD = FF'$), каждое из этих расстояний равно отрезку FF' , который в свою очередь равен ребру куба.

Л е м м а. Пусть даны точки A и B . Точки M_1 и M_2 , для которых выполнены условия:

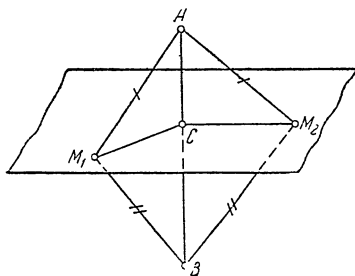
$$M_1A = M_2A \text{ и } M_1B = M_2B,$$

лежат в одной плоскости, перпендикулярной прямой AB .

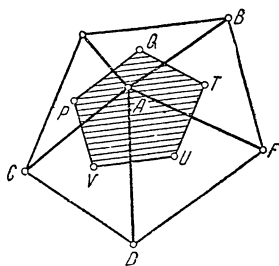
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M_1 и M_2 — две любые точки, для которых $M_1A = M_2A$ и $M_1B = M_2B$ (черт. 203). Тогда $\triangle AM_1B = \triangle AM_2B$. Поэтому основания высот этих треугольников, проведенных из вершин M_1 и M_2 , совпадут; пусть это будет точка C . Положение ее на прямой AB вполне определено. Точки M_1 и M_2 будут лежать в плоскости, проходящей через точку C и перпендикулярной к прямой AB .

Вершины C, D, F, B и F' икосаэдра одинаково удалены от вершины A и от центра куба. На основании леммы заключаем, что они лежат в одной плоскости.

Используем теперь построенный икосаэдр для построения правильного додекаэдра (двенадцатигранника). Центры



Черт. 203

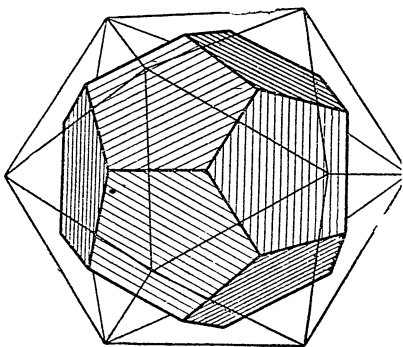


Черт. 204

пяти граней икосаэдра с общей вершиной A одинаково удалены от этой вершины и от центра куба. Вследствие равен-

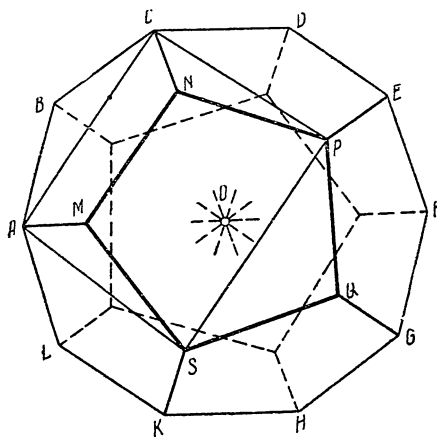
ства двугранных углов икосаэдра расстояния между центрами смежных граней его равны между собой (это расстояние составляет третью часть отрезка FF' , т. е. равно $\frac{a}{3}$). По-

этому центры этих граней являются вершинами правильного пятиугольника (черт. 204). Построив такой пятиугольник для каждой вершины икосаэдра, получим правильный додекаэдр (черт. 205).



Черт. 205

На чертеже 206 дана ортогональная проекция правильного додекаэдра на плоскость одной из его граней. Проекции вершин его A, B, C, \dots, L расположатся на окружности с центром O как вершины правильного десятиугольника, грань $MNPQS$ проектируется без искажения. Легко видеть, что сечение додекаэдра $ACPS$ (в натуре квадрат) спроек-



Черт. 206

тируется в виде прямоугольника. Отсюда вытекает следующее построение проекции додекаэдра. Строим пра-

вильный десятиугольник $ABC...KL$ и соединяем прямыми вершины и центр его, затем проводим прямые, перпендикулярные к отрезку AC и проходящие через его концы. Точки пересечения их с лучами OE и OK дадут две вершины грани $MNPQS$, пользуясь которыми легко завершить построение.

Из равенства расстояний вершин икосаэдра от центра куба O следует равенство расстояний центров его граней от центра этого же куба. Поэтому построенный при помощи данного икосаэдра додекаэдр можно разложить на двенадцать равных правильных пятиугольных пирамид с общей вершиной O и с основаниями, которые являются гранями этого додекаэдра. Отсюда следует, что все двугранные углы его равны между собой.

Центры граней правильного додекаэдра в свою очередь являются вершинами правильного икосаэдра.

Таким образом, при помощи куба мы построили остальные правильные многогранники. Шесть диагональных плоскостей симметрии куба, как вытекает из построения, являются плоскостями симметрии тетраэдра и октаэдра и три плоскости симметрии куба, параллельные его граням, являются плоскостями симметрии октаэдра, икосаэдра и додекаэдра. Так как эти три плоскости попарно перпендикулярны друг другу, то произведение отражений от них является отражением от центра куба (§ 66). Следовательно, центр куба является центром симметрии построенных нами октаэдра, икосаэдра и додекаэдра.

Легко решить обратную задачу: по данному ребру правильного многогранника построить этот многогранник. Для этого надо выразить ребро куба через ребро соответствующего правильного многогранника, построить куб, а после этого построить указанным способом искомый многогранник.

Определяется ли полностью правильный многогранник данного типа ребром? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Т е о р е м а. Правильные многогранники одного типа равны, если равны их ребра.

Пусть дан правильный многогранник F определенного типа с ребром a (например, икосаэдр). Построим при помощи куба правильный многогранник F' того же типа и с тем же ребром. Очевидно, многогранники F и F' изоморфны (§ 67). Так как, кроме того, грани их равны, то по теореме Коши многогранники F и F' либо равны, либо зеркально

равны. Так как многогранник F , как мы видели выше, имеет плоскость симметрии, то он зеркально равен самому себе. Поэтому многогранники F и F' равны.

§ 71. Симметрия правильных многогранников

Как мы видели выше, все правильные многогранники имеют плоскости симметрии. Все они, исключая тетраэдр, имеют центр симметрии. Из способа построения октаэдра следует, что плоскости симметрии куба (§ 61) являются плоскостями симметрии октаэдра. Следовательно, октаэдр имеет девять плоскостей симметрии: три плоскости, каждая из которых содержит по четыре ребра (соответствуют плоскостям симметрии куба, параллельных его граням), и шесть плоскостей, каждая из которых перпендикулярна двум ребрам и проходит через две вершины (соответствуют диагональным плоскостям симметрии куба).

Плоскость симметрии икосаэдра проходит через два его параллельных ребра. На чертеже 202 такими ребрами являются ребра AB и $A'B'$. Плоскость, проходящая через эти ребра, является плоскостью симметрии куба и построенного при помощи его икосаэдра. Так как икосаэдр имеет 30 ребер, то отсюда следует, что он имеет 15 плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через два параллельных ребра и перпендикулярна двум параллельным ребрам (плоскость, проходящая через ребра AB и $A'B'$, перпендикулярна ребрам CD и $C'D'$).

При каждом преобразовании икосаэдра самого в себя центры его граней преобразуются друг в друга. Поэтому плоскости симметрии икосаэдра являются плоскостями симметрии соответствующего ему додекаэдра. Тем же способом докажем, что плоскости симметрии додекаэдра являются плоскостями симметрии соответствующего ему икосаэдра (т. е. такого икосаэдра, вершины которого являются центрами граней додекаэдра). Отсюда следует, что додекаэдр имеет тоже 15 плоскостей симметрии, каждая из которых пройдет через два параллельных ребра и будет перпендикулярна двум другим ребрам.

Таким же путем установим, что икосаэдр и додекаэдр имеют одинаковое количество осей симметрии, то же относится к кубу и октаэдру.

Произведение отражений от двух плоскостей симметрии многогранника дает поворот (§ 62) вокруг линии их пересече-

чения, при котором данный многогранник самосовмещается. Следовательно, линия пересечения плоскостей симметрии правильного многогранника является его осью симметрии. Если по прямой пересекаются n плоскостей симметрии, то она будет являться осью симметрии n -го порядка.

Из сказанного выше можно заключить, что плоскости симметрии правильного многогранника пересекаются по прямым, проходящим либо через вершины его, либо через центры граней, либо через середины ребер. Поэтому оси симметрии правильного многогранника, имеющего центр симметрии, пройдут также либо через вершины, либо через центры граней, либо через середины его ребер (тетраэдр не имеет центра симметрии; ось симметрии его, проходящая через вершину, проходит также через центр его противоположной грани).

Найдем оси симметрии икосаэдра. В вершинах A' и B его (черт. 202) пересекаются пять плоскостей симметрии. Следовательно, прямая $A'B$ — ось симметрии пятого порядка. Так как икосаэдр имеет 12 вершин, то он имеет 6 осей симметрии пятого порядка.

В центре грани AFD и в центре противоположной ей грани $C'B'H'$ пересекаются три плоскости симметрии, каждая из которых проходит через вершину грани и перпендикулярна противоположащей стороне грани. Отсюда следует, что прямая, проходящая через центры противоположных граней икосаэдра, является его осью симметрии третьего порядка. Как легко подсчитать, икосаэдр имеет 10 осей симметрии третьего порядка.

В середине ребра AB и в середине противоположного ему ребра $A'B'$ пересекаются две плоскости симметрии: одна из них проходит через эти ребра, а другая перпендикулярна им. Прямая, проходящая через середины этих ребер, является осью симметрии второго порядка. Так как икосаэдр имеет 30 ребер, то он имеет 15 осей симметрии второго порядка.

Докажем, что икосаэдр других осей симметрии не имеет. При каждом самосовмещении некоторый плоский угол икосаэдра преобразуется в другой плоский угол (в частности, в тот же угол). Так как перемещение трех точек, не лежащих на одной прямой, полностью определяет движение, то число самосовмещений икосаэдра не может быть больше числа плоских углов его, т. е. больше 60. При каждом самосовмещении центр симметрии икосаэдра преобразуется сам в себя.

Поэтому каждое самосовмещение есть поворот икосаэдра около оси, проходящей через центр икосаэдра (§ 64).

Если ось s — ось симметрии многогранника n -го порядка, то существует $n - 1$ различных поворотов около нее, отличных от тождественного, при которых многогранник самосовмещается. Подсчитаем число таких самосовмещений для всех осей симметрии икосаэдра. Получим:

$(5-1) \cdot 6$ — для осей симметрии 5-го порядка,

$(3-1) \cdot 10$ — для осей симметрии 3-го порядка,

$(2-1) \cdot 15$ — для осей симметрии 2-го порядка.

Всего получим:

$$(5-1) \cdot 6 + (3-1) \cdot 10 + (2-1) \cdot 15 = 59$$

Прибавляя сюда тождественное движение, получим 60 различных самосовмещений.

Так как других самосовмещений икосаэдр не может иметь, то он не имеет других осей симметрии, кроме найденных.

§ 72. Подобие многогранников

В главе V дано определение гомотетии для любых фигур, независимо от того, лежат ли они в одной плоскости или нет. После установления основных свойств гомотетии мы рассмотрели в этой главе подобие фигур на плоскости. Дадим теперь понятие о подобии фигур в пространстве.

Произведение прямой гомотетии на движение назовем преобразованием подобия.

Преобразование подобия можно представить как произведение движения на прямую гомотетию. Доказательство этих предложений является буквальным повторением доказательства соответствующих теорем из § 39. Отсюда следует, что преобразование, обратное подобию, есть подобие. Затем на основании этой теоремы легко показать, что произведение двух подобий есть подобие. На основании этого делаем вывод, что совокупность преобразований подобия образует группу. Совокупность преобразований подобия, при которых некоторая плоскость остается неизменной, представляет рассмотренную выше группу преобразований подобия на плоскости (подгруппа группы подобия).

При гомотетии в пространстве плоскость преобразуется в параллельную плоскость или в самое себя.

Действительно, пусть a и b — прямые плоскости α . При гомотетии они отображаются в прямые a' и b' , лежащие в некоторой плоскости β . Возьмем произвольную точку M плоскости α и проведем через нее прямую c , пересекающую прямые a и b в точках A и B . При гомотетии точки A и B отображаются в точки A' и B' , лежащие на прямых a' и b' . Поэтому прямая c' , гомотетичная прямой c , лежит в плоскости β , и поэтому в плоскости β лежит точка M' , гомотетичная точке M . Ведя рассуждения в обратном порядке (от точки M' к точке M), докажем, что каждая точка плоскости β гомотетична определенной точке плоскости α . Стсюда следует, что плоскость β гомотетична плоскости α .

Если мы возьмем многоугольник F , лежащий в плоскости α , то он отобразится в многоугольник F' , лежащий в плоскости β .

Рассмотрим теперь выпуклый многогранник Φ . При гомотетии его поверхность отображается в замкнутую многогранную поверхность, ограничивающую выпуклый многогранник Φ' . Возьмем точку M , лежащую внутри многогранника Φ . Прямая a , проходящая через нее, пересечет поверхность многогранника Φ в двух точках A и B , не лежащих в одной грани. При гомотетии они отобразятся в точки A' и B' поверхности многогранника Φ' , тоже не лежащие в одной грани. Так как M — точка отрезка AB , то гомотетичная ей точка M' принадлежит отрезку $A'B'$. Это значит, что точка M отобразится при гомотетии во внутреннюю точку многогранника Φ' . Таким же путем докажем, что всякая внутренняя точка многогранника Φ' гомотетична определенной внутренней точке многогранника Φ . Отсюда следует, что гомотетия отображает выпуклый многогранник в выпуклый же многогранник.

При преобразовании подобия выпуклый многогранник Φ отобразится в выпуклый многогранник Φ' . Как выяснено выше, существует преобразование подобия, обратное первому, отображающее второй многогранник в первый. Такие многогранники называются подобными.

Два многогранника называются *подобными*, если существует преобразование подобия, отображающее один из них в другой.

Мы можем на основании этого определения сказать, что два многогранника подобны, если существует третий многогранник, равный одному из них и прямо гомотетичный другому.

Произведение обратной гомотетии на движение называется зеркальным подобием. Можно показать, что зеркальное подобие является произведением подобия на отражение от плоскости. Преобразование, обратное зеркальному подобию, является тоже зеркальным подобием. Частным случаем зеркального подобия является отражение от плоскости.

Два многогранника называются зеркально *подобными*, если существует зеркальное подобие, при котором один из них отображается в другой.

Из определения подобия следует, что подобные или зеркально подобные многогранники изоморфны, сходственные ребра их пропорциональны, а соответствующие плоские углы равны. Справедливо обратное предложение для выпуклых многогранников: *два изоморфных выпуклых многогранника подобны или зеркально подобны, если сходственные ребра их пропорциональны, а соответствующие плоские углы равны.*

Г Л А В А X I I

ОБЪЕМ МНОГОГРАННИКОВ

§ 73. Равносоставленные многогранники

Два многогранника называются смежными, если они имеют общие грани или части граней и не имеют общих внутренних точек. Соединение смежных многогранников F_1 и F_2 дает новый многогранник F , поверхность которого представляет совокупность граней многогранников F_1 и F_2 без многоугольников, общих для их поверхностей. Будем говорить в этом случае, что многогранник F разложен на два многогранника F_1 и F_2 .

Многогранник F_2 может в свою очередь представлять соединение многогранников F'_2 и F'_3 . Тогда многогранник F будет представлять соединение трех многогранников, т. е. разложен на три многогранника F_1 , F_2 и F_3 . Вообще многогранник можно разложить на любое число частей, каждая из которых представляет многогранник.

Два многогранника называются *равносоставленными*, если их можно разложить на одно и то же число соответственно равных многогранников.

Имеет место т е о р е м а: *Два многогранника, равносоставленные каждый с третьим многогранником, равносоставлены между собой.* Доказывается она тем же способом,

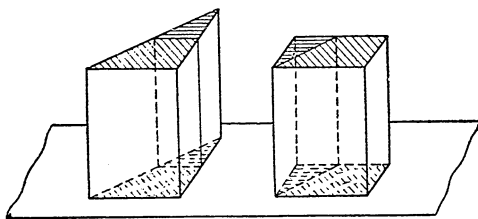
что и аналогичная теорема о равносоставленных многоугольниках.

Т е о р е м а. *Две прямые призмы равносоставлены, если основания их равновелики, а высоты равны.*

Пусть F и Φ — две такие призмы. Основаниями их являются два равновеликих многоугольника. Как известно, такие многоугольники равносоставлены. Поэтому основания призм можно разложить на одно и то же число соответственно равных многоугольников. Примем каждую из этих частей за основание прямой призмы с той же высотой и построим эти призмы. Тогда данные призмы F и Φ окажутся разложенными на одинаковое число прямых призм, имеющих соответственно равные основания и равные высоты, а поэтому соответственно равных между собой. Теорема доказана.

При доказательстве мы опирались на предположение: две прямые призмы равны, если равны их основания и высоты.

На чертеже 207 в качестве иллюстрации к теореме показаны две равносоставленные прямые призмы: F — треугольная призма и Φ — прямой параллелепипед.



Черт. 207

Т е о р е м а. *Два прямоугольных параллелепипеда равносоставлены, если произведение трех измерений¹ одного из них равно произведению трех измерений другого.*

Пусть измерения данных параллелепипедов F_1 и F_2 будут соответственно a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 . По условию $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$.

Ч а с т н ы й с л у ч а й. $a_1 = a_2$. Следовательно, $c_1 b_1 = c_2 b_2$. Примем в качестве оснований параллелепипедов грани с ребрами c_1, b_1 и c_2, b_2 . Параллелепипеды F_1 и F_2 имеют равновеликие основания и равные высоты и поэтому равносоставлены.

¹ Измерениями прямоугольного параллелепипеда называются длины его трех ребер, выходящих из одной вершины.

Общий случай. Возьмем третий параллелепипед F_3 с измерениями a_3, b_3, c_3 , причем $a_3 b_3 c_3 = a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$, $a_3 = a_1$ и $b_3 = b_2$ (отсюда $c_3 = \frac{b_1 c_1}{b_2}$). По дока-

занному параллелепипед F_3 равносоставлен с параллелепипедом F_1 и равносоставлен с параллелепипедом F_2 . В силу свойства транзитивности равносоставленных многогранников параллелепипеды F_1 и F_2 равносоставлены.

С л е д с т в и е. *Каждый прямоугольный параллелепипед с измерениями a, b, c равносоставлен с прямоугольным параллелепипедом, имеющим измерения 1, 1 и p , где $p = abc$.*

Можно доказать, что любая призма равносоставлена с прямой призмой, имеющей то же основание и ту же высоту. (Доказательство в качестве упражнения предоставляем читателю.) Отсюда и из доказанных выше теорем следует, что всякий многогранник, который можно разложить на конечное число призм, равносоставлен с некоторым прямоугольным параллелепипедом, два ребра которого являются единичными отрезками. Можно ли утверждать это для любого многогранника?

В 1902 г. Д е н доказал теорему, из которой следует, что существуют равновеликие, но не равносоставленные многогранники. В 1903 г. В. Ф. К а г а н дал более простое доказательство этого предложения, почему оно носит теперь название теоремы Дена—Кагана. Отсюда следует, что не всякий многогранник равносоставлен с призмой.

В теории измерения площадей многоугольников мы исходили из того, что каждый многоугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником. Как видим, аналогичное предложение здесь не имеет места. Поэтому теория измерения объемов многогранников должна строиться иначе.

§ 74. Объем многогранников

В основе теории измерения объемов многогранников лежит следующее допущение, которое может быть строго доказано.

Мы допускаем, что *каждому многограннику можно поставить в соответствие положительное действительное число так, что выполняются следующие условия:*

- 1) *равным многогранникам соответствуют равные числа;*
- 2) *если многогранник F представляет соединение двух многогранников F_1 и F_2 , то ему соответствует число, равное сумме чисел, соответствующих многогранникам F_1 и F_2 ;*

3) кубу, ребро которого принято за единицу длины, соответствует число один (единичный куб).

Число, соответствующее многограннику F при этих условиях, называется его *объемом* (об. F). Из условий 1—3 вытекают следующие следствия:

4) если многогранник представляет соединение многогранников F_1, F_2, \dots, F_k , то $\text{об. } F = \text{об. } F_1 + \text{об. } F_2 + \dots + \text{об. } F_k$;

5) если многогранник F представляет часть многогранника Φ (т. е. Φ представляет соединение F и некоторых других многогранников), то $\text{об. } F < \text{об. } \Phi$;

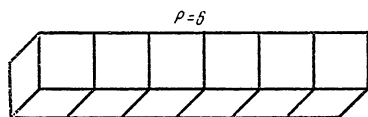
6) равноставленные многогранники имеют равные объемы.

Многогранники, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*, следовательно, можно сказать, что равноставленные многогранники равновелики. Обратное предложение, как было отмечено выше, вообще говоря, не имеет места.

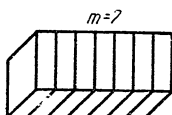
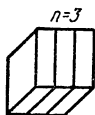
Т е о р е м а. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Рассмотрим сначала прямоугольный параллелепипед с измерениями 1; 1; p .

а) p — целое число (черт. 208).



Черт. 208



Черт. 209

Такой прямоугольный параллелепипед можно разложить на p единичных кубов. Объем каждого из них равен 1 (условия 1—3). По свойству 4 имеем:

$$\text{об. } F = \overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^{p \text{ раз}} = p.$$

б) $p = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа (черт. 209).

Разложим единичный куб на n равных прямоугольных параллелепипедов плоскостями, параллельными одной из граней.

Так как $p = \frac{m}{n}$, то прямоугольный параллелепипед F мы можем разложить на m таких равных между собой прямоугольных параллелепипедов. Пусть x — объем каждого из

них. Тогда по свойству 4 объем единичного куба равен nx , а объем параллелепипеда F равен mx .

По условию $3nx = 1$. Отсюда:

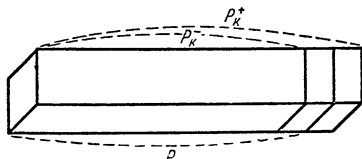
$$x = \frac{1}{n} \text{ и об. } F = mx = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} = p.$$

в) p — иррациональное число (черт. 210).

Пусть p_k^- и p_k^+ — приближенные значения p с точностью до $\frac{1}{10^k}$ соответственно с недостатком и избытком:

$$p_k^- < p < p_k^+, \text{ где } p_k^+ - p_k^- = \frac{1}{10^k}.$$

Возьмем прямоугольный параллелепипед F_1 с измерениями $1; 1; p_k^-$ и прямоугольный параллелепипед F_2 с измерениями $1; 1; p_k^+$. Легко видеть, что F_1



Черт. 210

является частью параллелепипеда F , а последний — частью параллелепипеда F_2 . Поэтому по свойству 5:

$$\text{об. } F_1 < \text{об. } F < \text{об. } F_2.$$

Так как p_k^- и p_k^+ — рациональные числа, то по доказанному:

$$\text{об. } F_1 = p_k^-; \text{ об. } F_2 = p_k^+.$$

Отсюда:

$$p_k^- < \text{об. } F < p_k^+$$

при любом k . Следовательно,

$$\text{об. } F = p.$$

Итак, объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями $1; 1; p$ равен числу p .

Рассмотрим теперь прямоугольный параллелепипед F с измерениями a, b, c . Он равносоставлен с прямоугольным параллелепипедом F' , имеющим измерения $1; 1; p$, где $p = abc$ ($abc = 1 \cdot 1 \cdot p$). По свойству 6 объемы их равны. По доказанному $\text{об. } F' = p$. Отсюда:

$$\text{об. } F = \text{об. } F' = p = abc.$$

С л е д с т в и е 1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Чтобы убедиться в этом, достаточно принять грань параллелепипеда с ребрами b и c в качестве основания. Тогда ребро a явится высотой, а произведение bc — площадью основания.

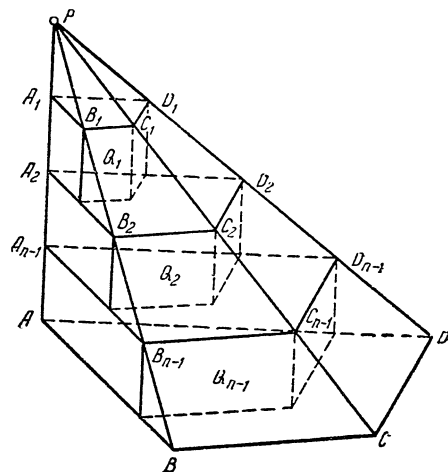
С л е д с т в и е 2. Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

Действительно, такая призма равносоставлена с прямоугольным параллелепипедом, имеющим ту же высоту и равновеликие основания (§ 73). Поэтому объем призмы равен объему этого параллелепипеда, объем которого по следствию 1 равен произведению высоты призмы на площадь ее основания.

§ 75. Объем пирамиды

Т е о р е м а. Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

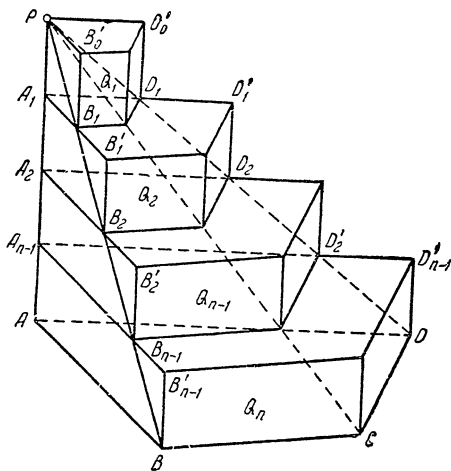
Доказательство теоремы начнем с рассмотрения частного случая, когда одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно основанию, т. е. является высотой пирамиды. Будем считать, что основанием пирамиды является любой выпуклый многоугольник.



Черт. 211

Пусть PA — ребро пирамиды $PABCD$, перпендикулярное основанию ее $ABCD$. Разобьем ребро PA на n равных частей точками A_1, A_2, \dots, A_{n-1} и через эти точки проведем плоскости, параллельные основанию. Тогда получим $n - 1$ сечений пирамиды S_1, S_2, \dots, S_{n-1} (нумерация идет от вершины к основанию), каждое из которых представляет многоугольник, по-

добный основанию. Проведем известное из школьного курса построение двух ступенчатых геометрических тел, представляющих соединение прямых призм, основаниями которых являются указанные сечения пирамиды, а высота-



Черт. 212

ми — отрезки высоты пирамиды PA , примыкающие к этим сечениям. Если эти отрезки примыкают к сечениям со сторонами основания $ABCD$, то получим многогранник F_n , составленный из призм Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} (черт. 211). Если же они примыкают к сечениям со стороны вершин P , то получим многогранник Φ_n , составленный из тех же призм Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} , сдвинутых на расстояние $\frac{PA}{n}$ к вершине, и

прямой призмы Q_n с основанием $ABCD$ и боковым ребром AA_{n-1} (черт. 212). При этом многогранник F_n является частью данной пирамиды, а последняя — частью многогранника Φ_n . Отсюда:

$$\text{об. } F_n < V < \text{об. } \Phi_n,$$

где V — объем данной пирамиды. Введем обозначения: H — высота пирамиды PA ; $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n = S$ — площади соответствующих сечений и площадь основания пирамиды.

Известно, что площади сечений пирамиды параллельными плоскостями относятся как квадраты их расстояний от ее вершины.

Поэтому:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\left(\frac{H}{n}\right)^2}{H^2}, \quad \frac{S_2}{S} = \frac{\left(\frac{2H}{n}\right)^2}{H^2}, \dots, \quad \frac{S_{n-1}}{S} = \frac{\left(\frac{n-1}{n}H\right)^2}{H^2}.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1^2}{n^2} S, \\ S_2 &= \frac{2^2}{n^2} S, \\ &\dots\dots\dots \\ S_{n-1} &= \frac{(n-1)^2}{n^2} S, \\ S_n &= \frac{n^2}{n^2} S. \end{aligned}$$

Найдем сумму площадей сечений и площади основания:

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} + S_n = \frac{S}{n^2} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2).$$

Известно, что

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Поэтому:

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} S.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\frac{H}{n}$, получим:

$$\text{об. } Q_1 + \text{об. } Q_2 + \dots + \text{об. } Q_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} HS.$$

Значит:

$$\text{об. } \Phi_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} HS.$$

Чтобы получить об. $F_n = \text{об. } Q_1 + \text{об. } Q_2 + \dots + \text{об. } Q_{n-1}$, достаточно в выражении для $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ заменить n через $n-1$. Получим при этом:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

$$\text{об. } F_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} HS.$$

После несложных преобразований получим:

$$\text{об. } F_n = \frac{HS}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

и

$$\text{об. } \Phi_n = \frac{HS}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

При неограниченном возрастании n , как видно из полученных выражений, об. F_n растет, а об. Φ_n убывает, причем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{об. } F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{об. } \Phi_n = \frac{HS}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{HS}{3}.$$

Так как при любом n

$$\text{об. } F_n < V < \text{об. } \Phi_n,$$

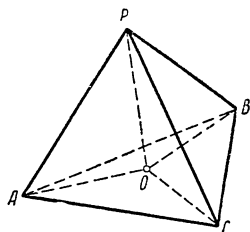
то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{об. } F_n \leq V \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{об. } \Phi_n.$$

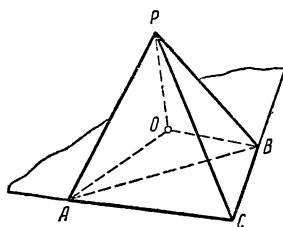
Окончательно получим:

$$v = \frac{HS}{3}.$$

З а м е ч а н и е. При данном доказательстве существенно, что основание пирамиды является выпуклым многоугольником. Действительно, при этом условии боковые ребра пирамиды, за исключением ребра PA , при ортогональном проектировании на плоскость основания будут проектироваться в стороны или диагонали основания, выходящие из вершины A . Отсюда легко сделать вывод, что проекция каждого сечения на нижележащее является частью последнего и поэтому каждая призма многогранника F_n полностью принадлежит пирамиде. В случае невыпуклого основания это может и не иметь места.



Черт. 213

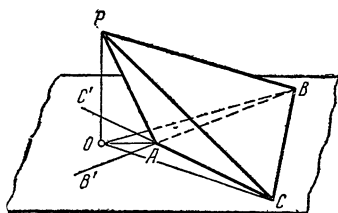


Черт. 214

Рассмотрим теперь треугольную пирамиду $PABC$, у которой все боковые ребра не перпендикулярны основанию. Возможны три случая:

а) основание O высоты пирамиды PO лежит внутри треугольника ABC или на его стороне (черт. 213);

б) основание O этой высоты лежит вне $\triangle ABC$, но внутри одного из внутренних углов его или на стороне этого угла (черт. 214);



Черт. 215

в) основание O лежит внутри угла, являющегося вертикальным с одним из углов треугольника (черт. 215).

Основываясь на рассмотренном выше частном случае теоремы, легко в каждом из этих трех случаев доказать, что объем треугольной пирамиды $PABC$ равен одной трети произведения площади основания ее на высоту.

Рассмотрим, например, случай в). Пирамида $POBC$ состоит из данной пирамиды $PABC$ и пирамид $POAB$ и $POAC$. Поэтому:

$$\text{об. } POBC = \text{об. } PABC + \text{об. } POAB + \text{об. } POAC,$$

или

$$\frac{1}{3} PO \cdot \text{пл. } OBC = \text{об. } PABC + \frac{1}{3} PO \cdot \text{пл. } OAB + \\ + \frac{1}{3} PO \cdot \text{пл. } OAC.$$

Отсюда:

$$\text{об. } PABC = \frac{1}{3} PO (\text{пл. } OBC - \text{пл. } OAB - \\ - \text{пл. } OAC) = \frac{1}{3} PO \cdot \text{пл. } ABC.$$

Итак, теорема справедлива для любой треугольной пирамиды.

Рассмотрим наконец произвольную пирамиду $PABCDE$, основанием которой является многоугольник $ABCDE$.

Разложим основание пирамиды каким-либо способом на треугольники (о возможности чего было сказано в § 58). Пусть это будут треугольники $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_k$. Данная пирамида разлагается на треугольные пирамиды с общей вершиной P и с основаниями $\triangle_1, \triangle_2, \dots, \triangle_k$. Пусть H — общая

высота всех этих пирамид. Тогда объем данной пирамиды будет равен сумме объемов указанных треугольных пирамид:

$$\begin{aligned} \text{об. } PABCDE &= \frac{1}{3} H \text{ пл. } \triangle_1 + \frac{1}{3} H \text{ пл. } \triangle_2 + \dots + \\ &+ \frac{1}{3} H \text{ пл. } \triangle_k = \frac{1}{3} H (\text{пл. } \triangle_1 + \text{пл. } \triangle_2 + \dots + \\ &+ \text{пл. } \triangle_k) = \frac{1}{3} HS, \end{aligned}$$

где S — площадь основания пирамиды.

Итак, теорема полностью доказана.

§ 76. Объем призматоида

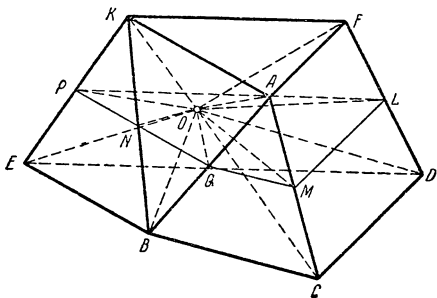
Призматойдом называется выпуклый многогранник, две грани которого, называемые основаниями, расположены в параллельных плоскостях, а все остальные грани представляют четырехугольники или треугольники, вершинами которых служат вершины оснований. Расстояние между плоскостями оснований называется высотой призматоида.

Т е о р е м а. *Объем призматоида выражается формулой:*

$$v = \frac{H}{6} (S_1 + S_2 + 4S'),$$

где H — высота призматоида, S_1 и S_2 — площади оснований, S' — площадь среднего сечения призматоида (т. е. сечения призматоида плоскостью, параллельной основаниям его и расположенной от них на равных расстояниях).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть многоугольники AKF и $EBCD$ — основания призматоида, а многоугольник $PQML$ — его среднее сечение (черт. 216). Возьмем на среднем сечении



Черт. 216

точку O и соединим ее с вершинами призматоида. После этого окажется, что призматойд представляет соединение пирамид, у которых точка O — общая вершина, а основаниями являются грани призматоида. Найдем объемы этих пирамид.

Легко видеть, что

$$\text{об. } OAKF = \frac{1}{3} \frac{H}{2} S_1, \text{ где } S_1 — \text{пл. } AKF,$$

и

$$\text{об. } OEBCD = \frac{1}{3} \frac{H}{2} S_2, \text{ где } S_2 — \text{пл. } EBCD.$$

Если среди оставшихся пирамид существуют четырехугольные, то разобьем каждую из них плоскостью, проходящей через вершину O и диагональ основания, на две треугольные пирамиды. Например, пирамида $OABEK$ разбита на треугольные пирамиды $OABK$ и $OBEK$. Тогда все остальные пирамиды окажутся тетраэдрами с общей вершиной O .

Найдем объем каждого из этих тетраэдров. Например, объем тетраэдра $OABC$:

$$\text{об. } OABC = \frac{1}{3} H' \text{ пл. } ABC,$$

где H' — высота данного тетраэдра, проведенная из вершины O .

Среднее сечение призматоида пересекает грань ABC по отрезку QM , который является средней линией $\triangle ABC$.

Имеем: $QM \parallel BC$. Тогда пл. $ABC = 4$ пл. AQM .
Отсюда:

$$\text{об. } OABC = 4 \cdot \frac{1}{3} H' \text{ пл. } AQM = 4 \text{ об. } OAMQ.$$

Примем в тетраэдре $OAMQ$ грань OMQ за основание.

$$\text{Тогда об. } OAMQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \text{пл. } OQM.$$

$$\text{Следовательно, об. } OABC = \frac{4}{6} H \cdot \text{пл. } OQM.$$

Совершенно также найдем, что

$$\text{об. } OABK = \frac{4}{6} H \cdot \text{пл. } OQN,$$

$$\text{об. } OBEK = \frac{4}{6} H \cdot \text{пл. } OPN \text{ и т. д.}$$

Найдем сумму объемов этих пирамид:

$$\text{об. } OABC + \text{об. } OABK + \text{об. } OBEK + \dots =$$

$$= \frac{4H}{6} (\text{пл. } OQM + \text{пл. } OQN + \text{пл. } ONP + \dots) = \frac{4H}{6} \cdot S',$$

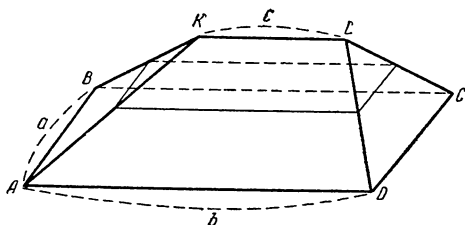
так как сумма площадей треугольников OQM , OQN , ONP и т. д. дает площадь среднего сечения призматоида.

Суммируя объемы всех пирамид, на которые оказался разбитым призматойд, получим объем последнего:

$$V = \frac{H}{6} S_1 + \frac{H}{6} S_2 + \frac{4H}{6} S' = \frac{H}{6} (S_1 + S_2 + 4S').$$

Если одно из оснований призматоида вырождается в отрезок, то полученный при этом многогранник назовем клином. Очевидно, объем клина мы можем найти по формуле объема призматоида, но в ней площадь одного из оснований равна нулю.

Пример. Найти объем клина с прямоугольным основанием, размеры которого показаны на чертеже 217.



Черт. 217

Вычисления дают:

$$S_1 = ab, \quad S_2 = 0,$$

$$S' = \frac{a}{2} \frac{b+c}{2}.$$

$$V = \frac{H}{6} \left(ab + 4 \frac{a}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \right) = \frac{H}{6} (2ab + ac),$$

где H — высота клина (расстояние от отрезка KL до плоскости основания $ABCD$).

Всякую призму мы можем рассматривать как частный случай призматоида. В этом случае $S_1 = S_2 = S' = S$ — площадь основания призмы. Для объема призмы получаем формулу:

$$V = \frac{H}{6} (S + S + 4S) = HS.$$

Итак, объем любой призмы (а не только прямой) равен произведению площади основания на высоту.

Легко получить формулу объема усеченной пирамиды, рассматривая ее как призматойд. В этом случае основания и среднее сечение призматойда представляют подобные многоугольники. Пусть a_1 , a_2 и a' — их сходственные стороны. Так как боковые грани усеченной пирамиды являются трапециями, то

$$a' = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

По теореме об отношении площадей подобных многоугольников имеем:

$$\frac{S_1}{S'} = \frac{a_1^2}{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{S_2}{S'} = \frac{a_2^2}{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2}.$$

Отсюда:

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S'}} = \frac{2a_1}{a_1 + a_2} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S'}} = \frac{2a_2}{a_1 + a_2}.$$

Находим S' :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S'}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S'}} &= 2; \quad \sqrt{S'} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2}, \\ S' &= \frac{S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2}}{4}. \end{aligned}$$

По формуле объема призматойда получаем:

$$\begin{aligned} V &= \frac{H}{6} \left[S_1 + S_2 + (S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2}) \right] = \\ &= \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}). \end{aligned}$$

Отметим в заключение следующие следствия из теоремы об объеме призматойда.

С л е д с т в и е 1. Если два многогранника могут быть помещены в такое положение, при котором всякая плоскость, параллельная какой-нибудь данной плоскости и пересекающая один из многогранников, пересекает также и другой и если при этом в сечении образуются всегда равновеликие фигуры, то объемы таких многогранников равны (принцип Кавальери для многогранников).

Пусть даны два таких многогранника F и F' и пусть α — данная плоскость. Через все вершины обоих многогранников проведем плоскости, параллельные плоскости α . Тог-

да оба многогранника разобьются на одно и то же число призматоеидов с равными высотами, равновеликими основаниями и равновеликими средними сечениями. Значит, оба многогранника F и F' разобьются на одинаковое число попарно равновеликих призматоеидов. Отсюда следует равновеликость многогранников F и F' .

С л е д с т в и е 2. Пусть имеем два многогранника F и F' и плоскость α , и пусть каждая плоскость σ , пересекающая многогранник F и параллельная плоскости α , пересекает также и многогранник F' . Если при этом площадь сечения многогранника F всегда меньше площади соответствующего сечения многогранника F' , то $\text{об. } F < \text{об. } F'$.

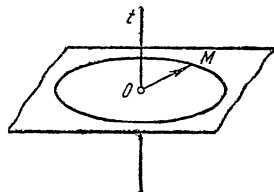
Действительно, в этом случае плоскости, параллельные плоскости α и проходящие через все вершины данных многогранников, разобьют их на неравновеликие призматоеиды: каждому призматоеиду многогранника F будет соответствовать призматоеид многогранника F' с той же высотой, но большего объема. Отсюда следует, что $\text{об. } F < \text{об. } F'$.

Г Л А В А XIII

ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

§ 77. Цилиндр, конус и усеченный конус

Окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной к прямой t , имеющую центр на этой прямой и проходящую через точку M , будем называть окружностью, образованной вращением точки M вокруг прямой t (черт. 218). Очевидно, что указанная окружность полностью определена точкой M и прямой t .

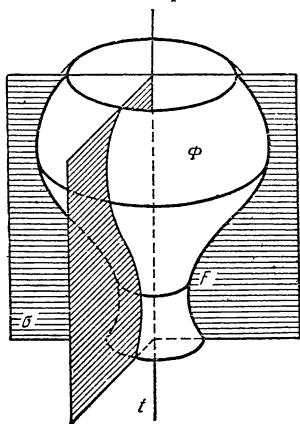


Черт. 218

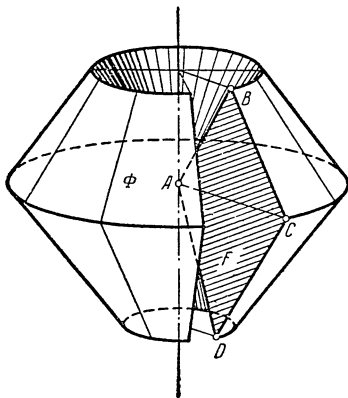
Пусть дана фигура F , лежащая в полуплоскости, ограниченной прямой t . Фигура Φ , являющаяся совокупностью окружностей, образованных вращением каждой точки фигуры F вокруг прямой t , называется фигурой вращения. Будем говорить, что фигура Φ образована вращением фигуры F вокруг прямой t (черт. 219).

Можно рассматривать более сложный случай, когда фигура F имеет точки, принадлежащие разным полуплоскостям, ограниченным прямой t . В нашем изложении мы всегда бу

дем считать, что фигура, от вращения которой вокруг прямой t образуется фигура Φ , принадлежит вся одной полуплоскости, ограниченной прямой t .



Черт. 219

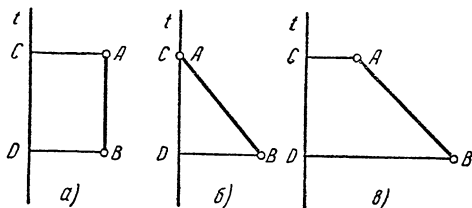


Черт. 220

Фигура Φ отображается сама в себя при повороте вокруг прямой t на любой угол, так как при этом сама в себя отображается каждая окружность вращения, принадлежащая данной фигуре. Следовательно, t — ось симметрии фигуры Φ . Любая плоскость σ , проходящая через ось t , является, очевидно, плоскостью симметрии фигуры Φ .

Если F — многоугольник, то фигура вращения Φ называется телом вращения, образованным вращением этого многоугольника вокруг прямой t (черт. 220). Фигура вращения, образованная при этом контуром многоугольника F , называется *поверхностью тела вращения* Φ .

Возьмем в полуплоскости, ограниченной прямой t , отрезок AB , и из его концов опустим на прямую t перпендикуляры AC и BD . Рассмотрим полученный при этом много-



Черт 221

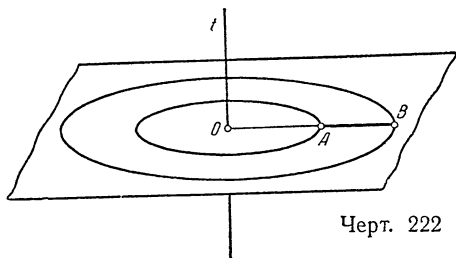
угольник $ACDB$ (черт. 221). Этот многоугольник может оказаться прямоугольником ($AB \parallel t$) или прямоугольным треугольником (A совпадает с C , т. е. A лежит на прямой t), или прямоугольной трапецией ($AB \nparallel t$). При вращении данного многоугольника вокруг прямой t получим соответственно известные из школьного курса тела вращения: цилиндр, конус и усеченный конус. Фигура вращения, образованная при этом отрезком AB , называется *боковой поверхностью соответствующего тела вращения*. Будем ее называть также поверхностью, образованной при вращении отрезка AB вокруг оси t .

При помощи предельного перехода в школьном курсе определяется площадь боковой поверхности каждого из этих тел вращения и их объемы.

Если l — длина отрезка AB и R_a и R_b — расстояние его концов A и B от прямой t , то площадь боковой поверхности указанных тел вращения можно выразить следующей общей формулой:

$$S = \pi (R_b + R_a) l.$$

Из нее при $R_a = R_b$ получаем формулу площади боковой поверхности цилиндра, а при $R_a = 0$ — формулу площади боковой поверхности конуса.



Черт. 222

Данная формула при $AB \perp t$ дает площадь кольца, образованного при вращении отрезка AB (черт. 222). Действительно, в этом случае $l = R_b - R_a$, и мы получаем:

$$S = \pi (R_b + R_a) (R_b - R_a) = \pi R_b^2 - \pi R_a^2.$$

Если u — расстояние середины отрезка AB от прямой t , то $u = \frac{1}{2} (R_b + R_a)$. Следовательно,

$$S = l \cdot 2\pi u.$$

Этим доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. *Площадь поверхности, образованной при вращении отрезка AB вокруг прямой t , равна произведению длины этого отрезка на длину окружности, образованной вращением его середины.*

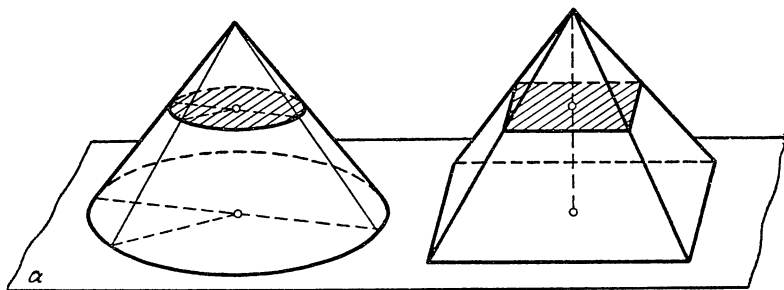
Формула объема усеченного конуса

$$V = \frac{\pi H}{3} (R_b^2 + R_a^2 + R_b R_a)$$

определяет также объем цилиндра при $R_b = R_a$ и объем конуса при $R_a = 0$.

Ниже мы будем пользоваться понятием принадлежности одной фигуры другой, определение которого дано в § 4.

Т е о р е м а. *Объем конуса (цилиндра, усеченного конуса) больше объема всякого принадлежащего ему многогранника, но меньше объема всякого многогранника, которому принадлежит данный конус.* Пусть Φ — данный конус. Рассмотрим



Черт. 223

пирамиду Φ' с той же высотой H и с основанием, равновеликим основанию конуса (таковым может быть, например, квадрат, длина стороны которого равна \sqrt{B} , где $B = \pi R^2$ — площадь основания конуса). Поместим конус и пирамиду в такое положение, чтобы их основания лежали в одной плоскости α , а вершины находились по одну сторону от этой плоскости (черт. 223). Тогда всякая плоскость, параллельная плоскости α и пересекающая одно из этих тел, будет пересекать и другое, причем сечения их будут равновелики. (Доказательство предоставляем читателю.)

Если Φ_1 — многогранник, вписанный в конус, то всякая плоскость, пересекающая его и параллельная плоскости α , пересекает также пирамиду Φ' , причем площадь сечения

многогранника Φ_1 будет всегда меньше площади соответствующего сечения пирамиды. Поэтому объем многогранника Φ_1 меньше объема пирамиды Φ' (§ 76).

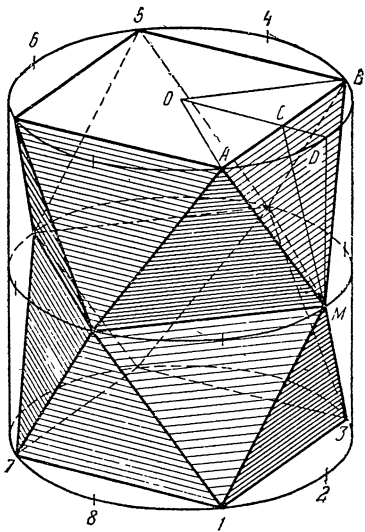
Если Φ_2 — многогранник, которому принадлежит конус, то всякая плоскость, параллельная плоскости α и пересекающая пирамиду Φ' , пересекает также многогранник Φ_2 , но теперь площадь сечения пирамиды будет меньше площади соответствующего сечения этого многогранника. Отсюда делаем вывод, что об. $\Phi_2 > \text{об. } \Phi'$.

Так как объем пирамиды Φ' равен объему конуса, то этим теорема для конуса доказана. Подобным же образом теорема доказывается для цилиндра и усеченного конуса.

Справедлива ли аналогичная теорема для поверхностей многогранников, принадлежащих телу вращения? Оказывается нет. Более того, можно построить многогранник, принадлежащий телу вращения так, что все его вершины будут принадлежать поверхности этого тела, ребра сколь угодно малы, а площадь поверхности сколь угодно велика.

Приведем пример, принадлежащий Шварцу.

Рассмотрим цилиндр с высотой H и радиусом основания R . Разделим высоту цилиндра на m равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные основанию цилиндра. Основания цилиндра и каждую окружность, полученную при пересечении поверхности цилиндра с указанной плоскостью, разделим на $2n$ равных частей так, чтобы точки деления их находились на прямых, параллельных оси цилиндра, т. е. на его образующих (черт. 224). Перенумеруем эти образующие по порядку, принимая в качестве первой какую-либо из них. Ближайшие между собой образующие будут занумерованы соседними натуральными числами. Исключением при этом являются



Черт. 224

соседние образующие, занумерованные числами 1 и $2n$. Указанные точки деления каждой окружности будем называть «четными» и «нечетными», в зависимости от номеров соответствующих им образующих.

Пользуясь данными точками деления, впишем в каждую окружность правильный n -угольник так, чтобы вершинами его в соседних сечениях являлись точки деления разной четности. Если, например, в верхнем основании взять в качестве вершин «нечетные» точки деления, то в первом сечении сверху таковыми будут «четные» точки, во втором сечении сверху — «нечетные» и т. д. Соединим, далее, между собой те вершины соседних многоугольников, которые расположены на соседних образующих. Вершина с номером i какого-либо многоугольника будет соединена с вершинами соседних многоугольников, имеющих номера $i - 1$ и $i + 1$.

Совокупность образовавшихся при этом треугольников представляет многогранную поверхность, вписанную в данный цилиндр. Найдём площадь этой поверхности.

Пусть ABM — одна из граней рассматриваемой поверхности, причём AB — хорда окружности сечения. Через середину C хорды AB проведем радиус OD сечения и соединим точку M с точками C и D .

Так как $\angle AOB$ представляет $\frac{1}{n}$ часть полного угла, то $AB = 2R \sin \frac{\pi}{n}$.

Находим, далее, высоту MC треугольника MAV :

$$MC = \sqrt{MD^2 + CD^2}.$$

Но

$$\begin{aligned} MD &= \frac{H}{m}, CD = OD - OC = R \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) = \\ &= 2R \sin^2 \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$MC = \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{n}},$$

$$\text{пл. } ABM = \frac{1}{2} AB \cdot MC = R \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{n}}.$$

Многогранная поверхность состоит из $2mn$ таких треугольников. Поэтому площадь $S(m, n)$ ее равна:

$$S(m, n) = 2mn R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Данное выражение можно переписать так:

$$S(m, n) = 2\pi R \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right) \sqrt{H^2 + \frac{\pi^4 R^2}{4} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^4 \left(\frac{m}{n^2} \right)^2}.$$

Пусть m и n неограниченно возрастают. Как известно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} = 1.$$

Существование предела $S(m, n)$ существенно зависит от способа стремления m и n к бесконечности. Рассмотрим отдельные случаи:

1) $m = pn$ ($p = \text{const}$);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(m, n) = 2\pi RH.$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2} = p$ ($p \neq 0$);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(m, n) = 2\pi RH \sqrt{1 + \frac{\pi^4 R^2 p^2}{4H^2}}.$$

3) $m = n^3$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(m, n) = \infty.$$

Таким образом, $S(m, n)$ имеет пределом принятое для площади боковой поверхности цилиндра значение $2\pi RH$ при неограниченном возрастании чисел m и n тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{m}{n^2} = 0.$$

Рассмотрим, что происходит при этом с углом $\varphi = \angle MCD$.

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{CD}{MD} = \frac{2R}{H} \cdot m \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Отсюда:

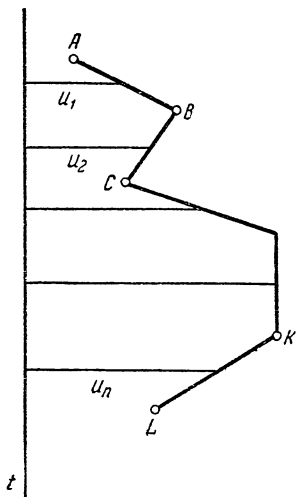
$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{2\pi^2 R}{H} \cdot \frac{m}{n^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right)^2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ctg} \varphi = \frac{2\pi^2 R}{H} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{n^2} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right)^2 = 0.$$

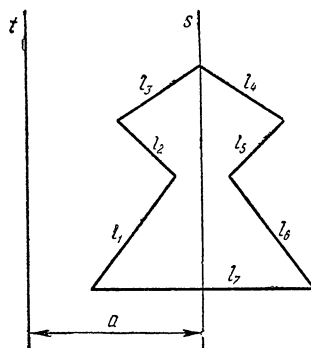
Это означает, что угол φ стремится к прямому углу, т. е. плоскость $\triangle AMB$ стремится стать параллельной оси цилиндра.

§ 78. Площади поверхностей вращения

Возьмем в качестве фигуры F простую ломаную линию $ABC...KL$ (черт. 225). Найдем площадь поверхности Φ , полученной при вращении этой ломаной вокруг прямой t . По доказанной в § 77 теореме:



Черт. 225



Черт. 226

$$\text{пл. } \Phi = l_1 \cdot 2\pi u_1 + l_2 \cdot 2\pi u_2 + \dots + l_n \cdot 2\pi u_n,$$

где l_1, l_2, \dots, l_n — длины сторон AB, BC, \dots, KL , а u_1, u_2, \dots, u_n — расстояния их середин до прямой t .

Преобразуем выражения для площади Φ . Пусть l — периметр ломаной:

$$l = l_1 + l_2 + \dots + l_n.$$

Тогда:

$$\text{пл. } \Phi = l \cdot 2\pi \frac{l_1 u_1 + l_2 u_2 + \dots + l_n u_n}{l},$$

или

$$\text{пл. } \Phi = l \cdot 2\pi u, \quad (1)$$

где

$$u = \frac{l_1 u_1 + l_2 u_2 + \dots + l_n u_n}{l}. \quad (2)$$

Если стороны ломаной представлять как однородные стержни одинаковой плотности, то середины сторон являются их центрами тяжести, а u — расстояние центра тяжести всей ломаной от прямой t . (Доказательство этого предложения дается в курсе механики.) Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема. (Первая теорема Гюльдена.) *Площадь поверхности, образованной при вращении ломаной вокруг прямой t , равна произведению периметра ломаной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.*

Доказанной теоремой удобно пользоваться для определения площади поверхности вращения в случае, когда известно расстояние центра тяжести ломаной от прямой t . В связи с этим отметим следующие важные частные случаи:

1. Если ломаная F имеет ось симметрии s , параллельную прямой t , то расстояние между прямыми s и t равно расстоянию центра тяжести ломаной от прямой t (т. е. центр тяжести ломаной лежит на ее оси симметрии).

Пример такой ломаной дан на чертеже 226. Для нее имеем:

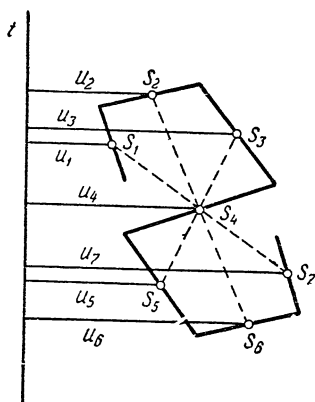
$$l_6 = l_1, \quad l_5 = l_2, \quad l_4 = l_3,$$

и

$$\frac{u_1 + u_6}{2} = \frac{u_2 + u_5}{2} = \frac{u_3 + u_4}{2} = u_7 = a,$$

где a — расстояние между прямыми s и t . Отсюда:

$$u = \frac{l_1 u_1 + l_2 u_2 + \dots + l_7 u_7}{l} = \frac{l_1(u_1 + u_6) + l_2(u_2 + u_5) + l_3(u_3 + u_4) + l_7 u_7}{l} = \\ = \frac{l_1 \cdot 2a + l_2 \cdot 2a + l_3 \cdot 2a + l_7 \cdot a}{l} = a.$$



Черт. 227

2. Если ломаная имеет центр симметрии, то ее центр тяжести совпадает с центром симметрии.

Справедливость данного предположения установим тоже для частного случая. Рассмотрим ломаную, изображенную на чертеже 227. Середина s_4 ее средней стороны является центром симметрии ломаной. Поэтому

$$\frac{u_1 + u_7}{2} = \frac{u_2 + u_6}{2} = \frac{u_3 + u_5}{2} = u_4$$

и

$$l_1 = l_7, l_2 = l_6, l_3 = l_5.$$

Отсюда:

$$u = \frac{l_1 u_1 + l_2 u_2 + \dots + l_7 u_7}{l} = \frac{l_1(u_1 + u_7) + l_2(u_2 + u_6) + l_3(u_3 + u_5) + l_4 u_4}{l} = u_4.$$

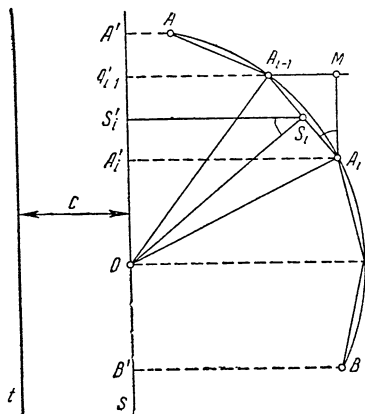
Поворачивая ломаную вокруг ее центра симметрии s_4 , мы не изменим расстояния центра тяжести ломаной от прямой t . Отсюда следует, что s_4 — центр тяжести ломаной.

Рассмотрим теперь более сложную поверхность вращения Φ , когда в качестве образующей фигуры F взята дуга AB окружности. Впишем в дугу AB правильную ломаную $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$. Предел периметра ломаной при неограниченном возрастании числа ее сторон дает длину дуги (§ 57). Покажем, что существует также предел площади поверхности Φ_n , образованной при вращении этой ломаной вокруг той же прямой t . Этот предел назовем величиной площади поверхности Φ , т. е. примем следующее определение.

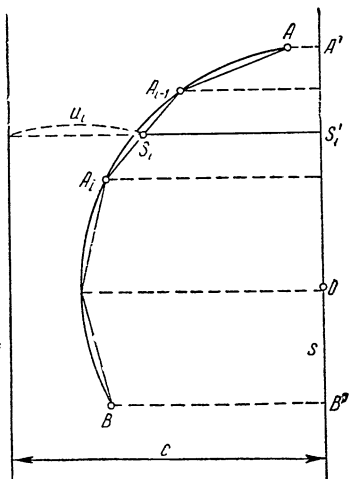
Площадью поверхности вращения, образованной при вращении дуги окружности вокруг прямой, называется предел площади поверхности вращения, образованной правильной ломаной, вписанной в данную дугу, при неограниченном возрастании числа сторон этой ломаной:

$$\text{пл. } \Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n^*}$$

Рассмотрим сначала случай, когда прямая s , параллельная прямой t и проходящая через центр окружности, которой принадлежит дуга AB , не пересекает эту дугу. Допустим также при этом, что дуга располагается вся в полуплоскости, ограниченной прямой s и не содержащей прямую t (черт. 228). Рассмотрим сторону ломаной $A_{i-1}A_i$. Опустим



Черт. 228



Черт 229

из концов ее и из середины S_i перпендикуляры на прямую s , основания которых обозначим соответственно через A'_{i-1} , A'_i и S'_i . Концы этой стороны и ее середину соединим с центром окружности O , а из конца A_i опустим перпендикуляр A_iM на прямую $A_{i-1}A'_i$. Из подобия треугольников $OS_iS'_i$ и $A_{i-1}MA_i$ получаем:

$$\frac{S_i S'_i}{OS_i} = \frac{A_i M}{A_{i-1} A_i}.$$

Обозначим сторону ломаной через a_n , а ее апофему — через k_n . Тогда

$$OS_i = k_n, \quad A_{i-1}A_i = a_n \text{ и } A_iM = A'_{i-1}A'_i.$$

Отсюда получим:

$$S_i S'_i = A'_{i-1} A'_i \cdot \frac{k_n}{a_n}.$$

Очевидно, что полученная формула для отрезка $S_i S'_i$ остается справедливой и в том случае, когда $A_{i-1} A_i \parallel t$. (В этом случае $A'_{i-1} A'_i = A_{i-1} A_i = a_n$, $S_i S'_i = k_n$.)

Расстояние центра тяжести S_i отрезка $A_{i-1} A_i$ от прямой t будет:

$$u_i = c + S_i S'_i = c + A'_{i-1} A'_i \cdot \frac{k_n}{a_n},$$

где c — расстояние между прямыми s и t .

Расстояние центра тяжести ломаной от прямой t :

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= \frac{u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots + u_n a_n}{n a_n} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \\ &= c + \frac{k_n}{n a_n} (A' A'_1 + A'_1 A'_2 + \dots + A'_{n-1} B) = c + \frac{k_n}{n a_n} A' B'. \end{aligned}$$

Полагая $A' B' = h$ и $n a_n = p_n$, окончательно получим:

$$u^{(n)} = c + \frac{k_n}{p_n} h.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = l \quad (\text{где } l \text{ — длина дуги } AB)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = R \quad (R \text{ — радиус окружности}),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} = c + h \frac{R}{l}.$$

Если дуга AB будет расположена вся в полосе, заключенной между прямыми t и s (черт. 229), то

$$u_i = c - S_i S'_i = c - A'_{i-1} A'_i \frac{k_n}{a_n}.$$

В этом случае

$$u^{(n)} = c - h \frac{k_n}{a_n}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} = c - h \frac{R}{l}.$$

Из рассмотренных выше случаев следует, что если дуга AB расположена по обе стороны прямой s , слагаемое $A'_{i-1} A'_i$ должно быть взято со знаком плюс, если середина хорды $A_{i-1} A_i$ не лежит в полосе между прямыми t и s , и со знаком минус — в противоположном случае.

Поэтому в общем случае:

$$u^{(n)} = c \pm h \frac{k_n}{p_n}$$

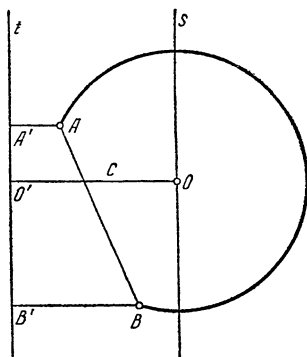
и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} = c \pm h \frac{R}{l}.$$

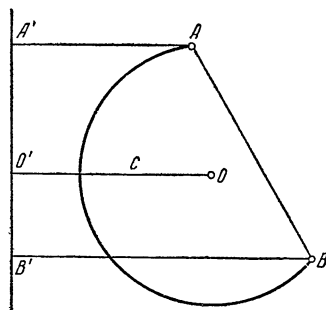
Выражение

$$u = c \pm h \frac{R}{l} \quad (3)$$

определяет расстояние центра тяжести дуги AB от прямой t ; проекция h хорды AB на прямую t берется со знаком плюс, если трапеция $AA'B'B$ не содержит внутренних точек дуги AB (черт. 230), и со знаком минус — в противоположном случае (черт. 231).



Черт. 230



Черт. 231

Найдем теперь площадь поверхности Φ . По формуле (1):

$$\text{пл. } \Phi_n = p_n \cdot 2\pi u^{(n)}.$$

Поэтому

$$\text{пл. } \Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{пл. } \Phi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \cdot 2\pi u^{(n)}).$$

Отсюда:

$$\text{пл. } \Phi = l \cdot 2\pi u. \quad (4)$$

Площадь поверхности, образованной при вращении дуги окружности вокруг прямой, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

Подставляя в полученную формулу значение u , получим:

$$\text{пл. } \Phi = 2\pi (cl \pm hR). \quad (5)$$

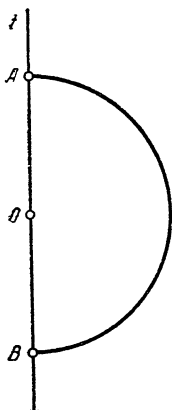
Частные случаи:

$$1) \ c = 0, \ h = 2R \quad (\text{черт. 232})$$

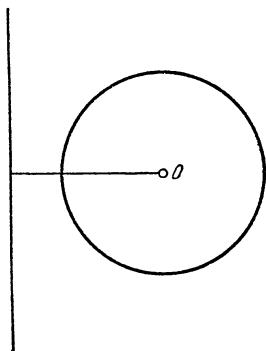
пл. $\Phi = 4\pi R^2$ — площадь поверхности шара;

2) фигура F представляет окружность (черт. 233). В этом случае $h = 0$ и $l = 2\pi R$.

$$\text{пл. } \Phi = 4\pi^2 c l.$$



Черт. 232



Черт. 233

Тело вращения, полученное при вращении круга вокруг прямой, называется *тором*. В примере 2, следовательно, нами найдена площадь поверхности тора.

§ 79. Объем тел вращения

Отнесем $\triangle ABC$ к прямоугольной системе координат и будем считать, что он расположен в первой четверти (черт. 234). Проекции вершин его на ось y обозначим соответственно через A_0 , B_0 и C_0 . Координаты вершин A , B и C обозначим при помощи индексов 1, 2 и 3 соответственно.

Рассмотрим тело, полученное при вращении $\triangle ABC$ вокруг оси y . При данном на чертеже расположении вершин треугольника объем V этого тела равен разности между объемом усеченного конуса, полученного при вращении прямоугольной трапеции AA_0C_0C и суммой объемов усеченных

конусов, полученных при вращении трапеций AA_0B_0B и BB_0C_0C . Найдем его:

$$V = \frac{\pi}{3}(y_1 - y_3)(x_1^2 + x_3^2 + x_1x_3) - \frac{\pi}{3}(y_1 - y_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) - \\ - \frac{\pi}{3}(y_2 - y_3)(x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3).$$

Полученное для V выражение преобразуется следующим образом:

$$V = \pi \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \cdot [y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)].$$

Как известно, выражение

$$S = \frac{1}{2} | [y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)] |$$

является площадью $\triangle ABC$, а выражение

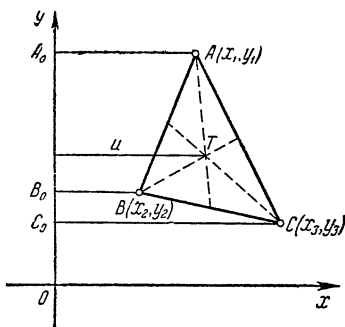
$$u = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

является расстоянием центра тяжести $\triangle ABC$ (т. е. точки пересечения медиан треугольника) от оси y .

Таким образом, объем V данного тела вращения равен:

$$V = S \cdot 2\pi u.$$

Объем тела, полученного при вращении $\triangle ABC$ вокруг прямой, равен произведению площади этого треугольника на длину окружности, описанной его центром тяжести.



Черт. 234

Пусть теперь нам дан многоугольник F . Разобьем его на треугольники F_1, F_2, \dots, F_n . Площадь треугольника F_i и расстояние его центра тяжести от оси y обозначим соответственно через S_i и u_i .

Объем тела Φ , полученного при вращении многоугольника F вокруг оси y , равен сумме объемов тел, полученных при вращении треугольников F_i . Следовательно,

$$\text{об. } \Phi = S_1 \cdot 2\pi u_1 + S_2 \cdot 2\pi u_2 + \dots + S_n \cdot 2\pi u_n.$$

Как известно из механики, выражение

$$u = \frac{S_1 u_1 + S_2 u_2 + \dots + S_n u_n}{S},$$

где $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ — площадь многоугольника F , является расстоянием центра тяжести этого многоугольника от оси y и поэтому не зависит от способа разбиения его на треугольники.

Отсюда получаем:

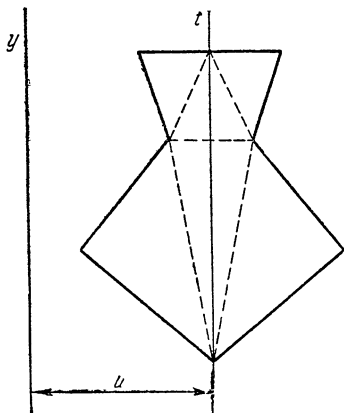
$$\text{об. } \Phi = S \cdot 2\pi u, \quad (6)$$

т. е. объем тела Φ , полученного при вращении многоугольника F вокруг прямой, равен произведению площади этого многоугольника на длину окружности, описанной его центром тяжести (вторая теорема Гюльдена).

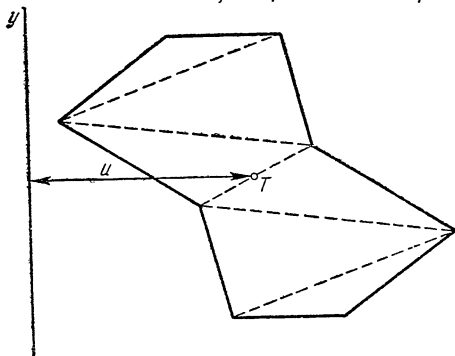
Как и в § 78, отметим следующие частные случаи, когда известно расстояние центра тяжести многоугольника от прямой, вокруг которой происходит вращение.

1. Если многоугольник F имеет ось симметрии t , параллельную прямой y (черт. 235), то расстояние между прямыми t и y равно расстоянию центра тяжести многоугольника от прямой y (центр тяжести многоугольника лежит на его оси симметрии).

2. Если многоугольник имеет центр симметрии, то его центр тяжести совпадает с центром симметрии (черт. 236).



Черт. 235

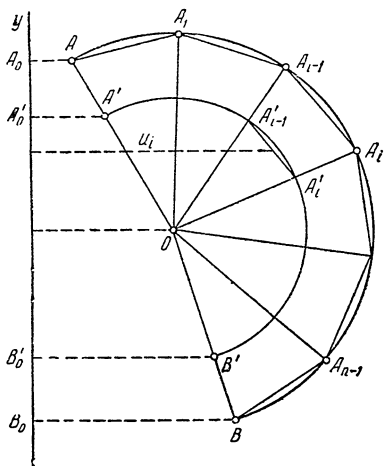


Черт. 236

Справедливость данных предложений устанавливается совершенно так же, как аналогичных предложений для ломаной.

Возьмем теперь в качестве фигуры F сектор, лежащий с прямой y в одной плоскости и не пересекающий ее (черт. 237). Впишем в дугу AB сектора правильную ломаную $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ (точка A_n совпадает с точкой B) и соединим вершины ее с центром сектора O .

Предел суммы площадей треугольников $OA_{i-1}A_i$ при неограниченном увеличении числа сторон ломаной дает площадь сектора F :



Черт. 237

$$S = \text{пл. } F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{пл. } OA_{i-1}A_i.$$

Так как треугольники $OA_{i-1}A_i$ равны между собой, то

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \text{пл. } OA_{i-1}A_i).$$

По второй теореме Гюльдена объем V_i тела, полученного при вращении вокруг прямой y треугольника $OA_{i-1}A_i$, равен:

$$V_i = \text{пл. } OA_{i-1}A_i \cdot 2\pi u_i,$$

где u_i — расстояние центра тяжести этого треугольника от оси y . Рассмотрим сумму таких объемов:

$$V^{(n)} = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \text{пл. } OA_{i-1}A_i \cdot 2\pi u_i.$$

Отсюда:

$$V^{(n)} = 2\pi \cdot \text{пл. } OA_{i-1}A_i (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = 2\pi (n \cdot \text{пл. } OA_{i-1}A_i) \times \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

Возьмем дугу $A'B'$, концентрическую с дугой AB и с радиусом $OA' = \frac{2}{3}OA$. Тогда u_i является расстоянием

центра тяжести хорды $A'_{i-1}A'_i$, концы которой принадлежат дуге $A'B'$, от прямой y (при соответствующих обозначениях). Как выяснено в предыдущем параграфе,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = u$$

является расстоянием от оси y центра тяжести дуги $A'B'$. Этот предел определяет также расстояние центра тяжести сектора от прямой y .

Отсюда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V^{(n)} = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \text{пл. } AO_{i-1}A_i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = 2\pi Su.$$

Данный предел примем за объем тела, полученного при вращении сектора F . Обозначая этот предел через V , имеем:

$$V = S \cdot 2\pi u. \quad (7)$$

Объем тела, полученного при вращении кругового сектора вокруг прямой, равен произведению площади сектора на длину окружности, описанной его центром тяжести.

По формуле 3 (§ 78):

$$u = c \pm h' \frac{R'}{l'},$$

где c — расстояние центра O от прямой y , $h' = A'_0B'_0$ — проекция хорды $A'B'$ на прямую y , а $R' = OA'$ и l' — радиус дуги $A'B'$ и ее длина. Так как $R' = \frac{2}{3}R$, где $R = OA$, то

$h' = \frac{2}{3}h$, где $h = A_0B_0$ — проекция хорды AB на прямую y , и $l' = \frac{2}{3}l$, где l — длина дуги AB . Отсюда:

$$u = c \pm \frac{2hR}{3l}.$$

Подставляя найденное значение для u в выражение объема V и замечая, что $S = \frac{Rl}{2}$, получим:

$$V = 2\pi \left(cS \pm \frac{hR^2}{3} \right). \quad (8)$$

Таково окончательное выражение для объема тела, полученного при вращении сектора. Знак плюс при этом берется в том случае, если трапеция $A_0AB B_0$ не содержит внутрен-

них точек дуги AB , а знак минус — в противоположном случае.

Рассмотрим частные случаи.

1. Вокруг прямой t вращается круг. Полученное при этом тело вращения является тором (черт. 233). В этом случае $h = 0$ и $S = \pi R^2$. Объем тора:

$$V = 2\pi c \cdot \pi R^2 = 2\pi^2 c R^2.$$

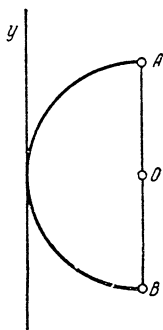
2. Сектор F представляет полукруг, диаметр которого лежит на прямой t (черт. 232). Теперь $c = 0$, $h = 2R$, и мы имеем:

$$V = 2\pi \cdot \frac{h \cdot R^2}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Получили известную из школьного курса формулу объема шара.

3. Сектор F представляет полукруг, касающийся прямой y , причем диаметр AB параллелен этой прямой (черт. 238). Для данного случая $c = R$, $h = 2R$ и перед h надо взять знак минус:

$$V = 2\pi \left(R \frac{\pi R^2}{2} - \frac{2R \cdot R^2}{3} \right) = \left(\pi - \frac{4}{3} \right) \pi R^3.$$



Черт. 238

О Г Л А В Л Е Н И Е

Г л а в а I.

Основные понятия

§ 1.	Введение	3
§ 2.	Аксиомы принадлежности	7
§ 3.	Порядок точек на прямой	8
§ 4.	Понятие фигуры	11
§ 5.	Угол	13
§ 6.	Многоугольник	18
§ 7.	Понятие движения в элементарной геометрии . .	21
§ 8.	Равенство фигур	25
§ 9.	Деление угла пополам. Перпендикулярные прямые	29
§ 10.	Окружность	33
§ 11.	Две окружности	35
§ 12.	Параллельные прямые	38

Г л а в а II.

Построения на плоскости

§ 13.	Построения на плоскости при помощи циркуля и линейки	41
§ 14.	Понятие о построениях при помощи одного циркуля	44
§ 15.	Понятие о построениях при помощи одной линейки	45
§ 16.	Построения при помощи двусторонней линейки . .	47
§ 17.	О методах решения задач на построение	49
§ 18.	«Метод геометрических мест»	53

Г л а в а III.

Движения на плоскости

§ 19.	Общие свойства движений	56
§ 20.	Отражение от прямой	58
§ 21.	Движение произвольного вида на плоскости . . .	60
§ 22.	Векторы	62
§ 23.	Переносы на плоскости	64

§ 24. Ориентированные углы	67
§ 25. Повороты на плоскости	71
§ 26. Скользящее отражение	75
§ 27. Классификация движений на плоскости	78
§ 28. Применение движений к геометрическим построениям	79

Г л а в а IV.

Измерение отрезков

§ 29. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки	83
§ 30. Арифметизированный луч	86
§ 31. Измерение отрезков	90
§ 32. Переход от одной единицы измерения к другой. Отношение отрезков	94
§ 33. Задача, обратная задаче измерения отрезков	97
§ 34. Пропорциональные отрезки	99

Г л а в а V.

Гомотетия и подобие

§ 35. Определение и свойства гомотетии	102
§ 36. Различные способы задания гомотетии	107
§ 37. Гомотетия окружностей	110
§ 38. Произведение гомотетий	111
§ 39. Преобразование подобия на плоскости	115
§ 40. Подобие фигур на плоскости	118
§ 41. Метод подобия	121

Г л а в а VI.

Элементы геометрии окружностей

§ 42. Степень точки относительно окружности	123
§ 43. Радиальная ось	125
§ 44. Радиальный центр	128
§ 45. Окружность Аполлония	131
§ 46. Инверсия	135
§ 47. Инверсия прямой и окружности	140
§ 48. Основное свойство инверсии	144
§ 49. Задача Аполлония	147

Г л а в а VII.

Построения на плоскости

(продолжение)

§ 50. Алгебраический метод решения задач на построение	149
§ 51. Точки, построение которых осуществимо циркулем и линейкой	156

§ 52. Неразрешимость некоторых задач на построение циркулем и линейкой	161
§ 53. Построения одним циркулем	166

Г л а в а VIII.

Длина окружности

§ 54. Деление окружности на равные части	169
§ 55. Правильные многоугольники	176
§ 56. Длина окружности	179
§ 57. Спрявление окружности. Длина дуги	183

Г л а в а IX.

Площади

§ 58. Равносоставленные многоугольники	186
§ 59. Измерение площадей многоугольников	192
§ 60. Площадь круга	196

Г л а в а X.

Движение в пространстве

§ 61. Отражение от плоскости	198
§ 62. Повороты в пространстве	201
§ 63. Переносы в пространстве	205
§ 64. Движение с неподвижной точкой	208
§ 65. Движение произвольного вида в пространстве	209
§ 66. Отражение от точки в пространстве	212

Г л а в а XI.

Многогранники

§ 67. Общие свойства многогранников	214
§ 68. Теорема Эйлера для выпуклых многогранников	219
§ 69. Правильные многогранники	223
§ 70. Построение правильных многогранников	224
§ 71. Симметрия правильных многогранников	231
§ 72. Подобие многогранников	233

Г л а в а XII.

Объем многогранников

§ 73. Равносоставленные многогранники	235
§ 74. Объем многогранников	237
§ 75. Объем пирамиды	240
§ 76. Объем призматоида	245

Г л а в а XIII.

Фигуры вращения

§ 77. Цилиндр, конус и усеченный конус	249
§ 78. Площади поверхностей вращения	256
§ 79. Объем тел вращения	262

Николай Николаевич Шоластер

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
КРАТКИЙ КУРС ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ПЕДИНСТИТУТОВ

Редактор *Н. А. Угарова, Л. Г. Немцова*
Художественный редактор *П. В. Любарский*
Технический редактор *В. Л. Волчек,*
И. Г. Крейс

Корректор *Т. Н. Смирнова*

Сдано в набор 6/V-1959 г. Подписано к
печати 7/XII-1959 г. $84 \times 108^{1/32}$. Печ. л. 17
(13,94). Уч.-изд. л. 12,44. Тираж 20 000 экз.
А 10 279. Заказ № 225.

Цена 3 руб. 75 коп.

* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной
рощи, 41

Полиграфкомбинат им. Я. Коласа Главиз-
дата Министерства культуры БССР,
Минск, Красная, 23